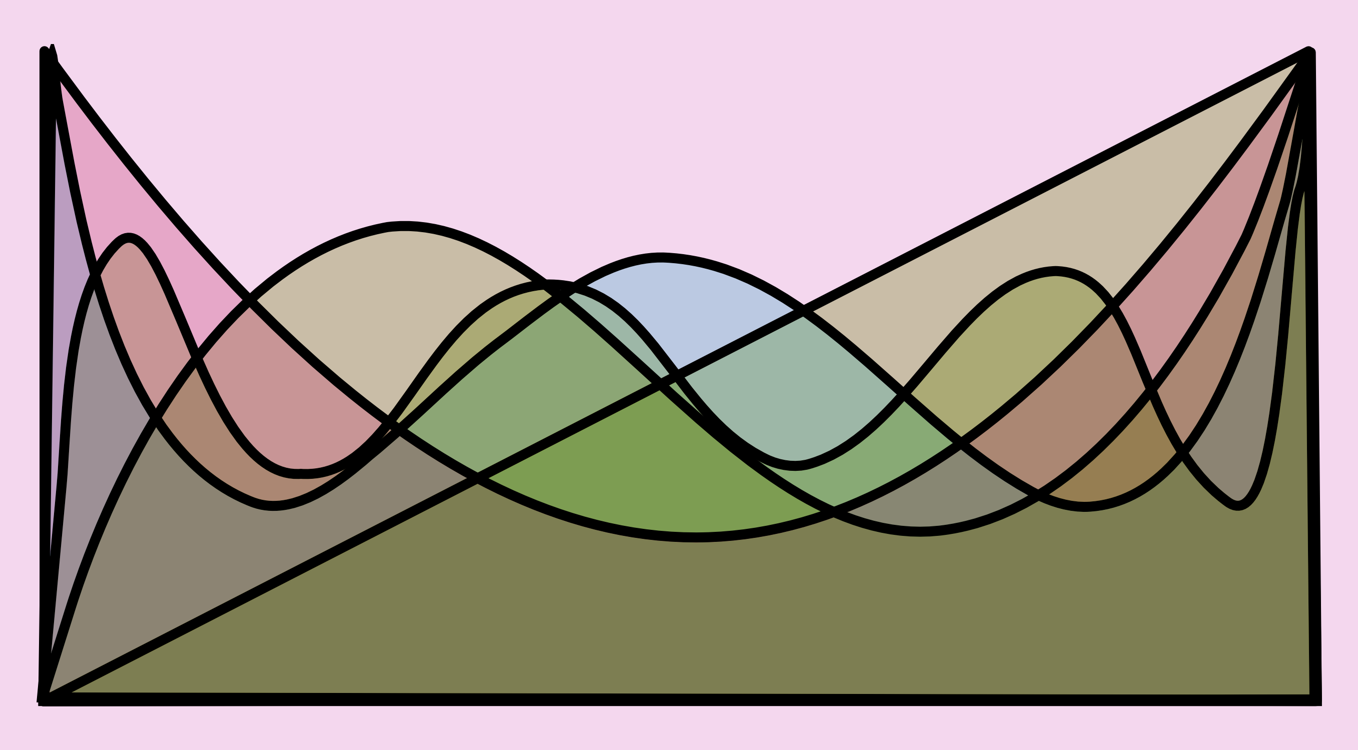
A. Nikiforov, V. Ouvarov

# FONCTIONS SPÉCIALES DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE



Éditions Mir Moscou

А. Ф. НИКИФОРОВ,
В. Б. УВАРОВ

# СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

A. NIKIFOROV, V. OUVAROV

# FONCTIONS SPÉCIALES DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

ÉDITIONS MIR • MOSCOU

Traduit du russe
par VLADIMIR KOTLIAR

*На французском языке*

# TABLE DES MATIÈRES

# AVANT-PROPOS À L'ÉDITION FRANÇAISE

La théorie des fonctions spéciales qui est née dans lés travaux d'Euler, Gauss, Laplace, Jacobi, Riemann et Tchébychev est de longue date une discipline classique des mathématiques, qui s'est profondément enracinée en analyse mathématique, en théorie des fonctions d'une variable complexe, en théorie des représentations des groupes, en physique théorique et mathématique, et qui, de par ses liens avec ces branches, possède un vaste champ d'applications. Les propriétés des fonctions spéciales ont fait l'objet de travaux fondamentaux. Malheureusement chaque classe de fonctions spéciales a son propre appareil mathématique (au surplus assez lourd) et d'innombrables artifices. Le présent ouvrage propose une nouvelle méthode de construction de la théorie des fonctions spéciales qui est basée sur une idée générale relativement simple permettant de traiter cette théorie d'un point de vue unique avec un outil mathématique assez élémentaire.

Les fonctions spéciales sont toutes considérées comme des solutions particulières de l'équation différentielle d'un certain type apparaissant dans de nombreux problèmes de physique théorique et mathématique. Grâce à une généralisation assez évidente de la formule de Rodrigues pour les polynômes de Legendre, on a pu trouver une représentation intégrale unique pour toutes les fonctions spéciales. Ceci a permis de développer d'une façon naturelle et assez concise les principaux faits de la théorie des fonctions sphériques, cylindriques et hypergéométriques (ainsi que des généralités sur les polynômes orthogonaux classiques d'une variable continue et d'une variable discrète), faits dont l'étude nécessitait bien plus de temps et d'efforts.

Cet ouvrage étant destiné surtout aux physiciens, les auteurs ont regroupé l'essentiel de ce qui concerne les fonctions spéciales en physique mathématique et en mécanique des quanta. En même temps ils ne se sont pas fixé pour objectif de donner le maximum de détails sur les fonctions spéciales, mais d'esquisser les grands traits d'une méthode qui, en s'appuyant sur une approche unique, permette d'ap-

pliquer cette théorie aux autres disciplines scientifiques et de résoudre les divers problèmes auxquels sont confrontés le physicien, le mathématicien, l'ingénieur.

Les auteurs espèrent que cette approche, qui repose en fait sur la seule formule du mathématicien français Benjamin Olinde Rodrigues (1794-1851), rappelle au lecteur la pensée de Poincaré : « Les mathématiques sont l'art d'appeler des choses différentes par le même nom » et aide les futurs ingénieurs et chercheurs en physique, chimie et autres sciences appliquées à assimiler vite et sérieusement la théorie des fonctions spéciales et leurs applications, qu'elle s'avère enfin utile dans la préparation des cours de physique mathématique, de mécanique des quanta, voire de théorie des fonctions d'une variable complexe.

*A. Nikiforov, V. Ouvarov*

Juillet 1982

# PRÉFACE

La connaissance des fonctions spéciales est indispensable à la bonne intelligence de nombreuses questions capitales de la Physique théorique et de la Physique mathématique.

D'autre part, à l'époque où les méthodes numériques s'implantent de plus en plus dans la pratique et le rôle du calcul numérique dans les expériences ne cesse de croître, nous assistons au renouveau d'intérêt pour les fonctions spéciales. Ce regain tient à deux circonstances. Premièrement, on est souvent amené, en construisant le modèle mathématique d'un phénomène physique et en cherchant à préciser l'importance relative des différents effets en jeu, à simplifier le problème initial dans le but d'obtenir la solution sous forme analytique se prêtant facilement à l'analyse. Deuxièmement, le problème simplifié facilite le choix d'un algorithme de calcul fiable et économique, bien adapté à la résolution sur ordinateur des problèmes complexes. Or, il arrive rarement qu'un tel problème se réduise à des fonctions élémentaires.

Les fonctions spéciales les plus usitées sont celles que l'on réunit sous le terme de fonctions spéciales de la Physique mathématique: les polynômes orthogonaux classiques (polynômes de Jacobi, de Laguerre, d'Hermite), les fonctions sphériques, cylindriques, hypergéométriques. La théorie de ces fonctions et leurs différentes applications font l'objet de nombreux ouvrages de fond. Malheureusement, les auteurs de ces ouvrages se servent d'un appareil mathématique extrêmement encombrant, ainsi que de toute une série d'artifices particuliers. Le besoin d'une théorie des fonctions spéciales bâtie autour d'une idée maîtresse, générale et suffisamment simple, se faisait donc sentir depuis longtemps.

Les auteurs du livre préfacé proposent une approche, remarquablement simple, de la théorie des fonctions spéciales fondée sur la généralisation de la formule connue de Rodrigues pour les polynômes orthogonaux classiques. Une telle approche permet d'obtenir sous forme explicite les représentations intégrales de toutes les fonctions spéciales de la Physique mathématique, ainsi que de dégager leurs propriétés principales. En particulier, on résout par cette

méthode les équations différentielles linéaires du second ordre dont on cherche d'habitude les solutions par la méthode de Laplace. L'appareil mathématique utilisé est fort réduit : le lecteur doit simplement posséder les rudiments de la théorie des équations ordinaires et de la théorie des fonctions d'une variable complexe. C'est là un avantage indiscutable de l'ouvrage : on n'ignore pas en effet qu'un volume effrayant des connaissances mathématiques requises, y compris dans le domaine des fonctions spéciales, constitue la pierre d'achoppement de quiconque veut étudier la physique théorique et mathématique.

Les auteurs veulent habituer le lecteur à établir les formules asymptotiques, les développements en séries, les relations de récurrence, à faire toutes sortes d'évaluations, à déduire des formules servant au calcul. Le lecteur apprendra à voir des affinités logiques cachées entre les fonctions spéciales là où, de prime abord, on ne voit rien de commun.

Ce livre jette des ponts aux domaines contigus des Mathématiques et de la Physique. Une large place est réservée aux applications quantiques. Ceux qui se consacrent à la Mécanique des quanta apprécieront sans doute l'exposé des questions liées à la recherche du spectre discret d'énergies et des fonctions d'onde correspondantes dans les problèmes où interviennent des polynômes orthogonaux classiques. Les auteurs traitent ces questions sans faire appel aux traditionnelles séries de puissances généralisées. Ils illustrent leur approche en résolvant d'une façon particulièrement élégante, dans le chapitre V, certains problèmes importants de la Mécanique quantique : ceux de l'oscillateur harmonique, de mouvement d'une particule dans un champ central, les équations de Schrödinger, de Dirac et de Klein-Gordon pour le potentiel coulombien ... Je voudrais souligner aussi l'exposé remarquable de la méthode de Wentzel-Kramers-Brillouin basé sur la méthode proposée par V. Steklov.

En parlant des fonctions sphériques et cylindriques, les auteurs font intervenir les théorèmes d'addition, largement utilisés dans la théorie des spectres atomiques, la théorie de la diffusion, dans le calcul des réacteurs nucléaires. Considérant les fonctions sphériques généralisées, ils abordent la théorie des représentations du groupe de rotations, ainsi que la théorie générale du moment de la quantité de mouvement. Au lecteur désireux d'en connaître davantage sur les fonctions spéciales, ils conseillent des travaux où ces dernières sont présentées en termes de la théorie des groupes. Pour ceux qui s'occupent de la théorie des méthodes aux différences, les polynômes orthogonaux classiques d'une variable discrète seront d'une grande utilité. Dans l'optique des méthodes d'approximation, il est très instructif d'étudier l'application des formules de quadrature du type de Gauss au calcul des sommes et à l'établissement de formules approchées pour les fonctions spéciales. Remarquons que, parmi les questions

exposées dans ce livre et extrêmement importantes en vue des applications, nombreuses sont celles que les auteurs des manuels existants évoquent à peine ou négligent carrément.

Le présent ouvrage est dû à la plume de deux spécialistes éminents de la Physique mathématique et de la Mécanique des quanta. Il est le fruit de leurs recherches sur un problème d'actualité de la physique du plasma, effectuées à l'Institut des Mathématiques appliquées M. Keldych de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.

Les auteurs abordent un grand nombre de questions d'une façon claire et logique tout en restant dans le cadre d'un volume maniable. Le livre proposé sera sans aucun doute utile à un cercle de lecteurs très étendu : élèves des écoles supérieures, étudiants post-universitaires préparant leur thèse, mais aussi chercheurs en Physique mathématique et en Physique théorique.

L'académicien *A. Samarski*

# AVANT-PROPOS À L'ÉDITION RUSSE

Les fonctions spéciales font leur apparition dans de nombreux problèmes de la Physique théorique et de la Physique mathématique, tels que la conduction de la chaleur, l'interaction rayonnement-matière, la propagation d'ondes électromagnétiques et sonores, la théorie des réacteurs nucléaires, celle de la structure des étoiles ...

Dans la pratique, les fonctions spéciales interviennent généralement comme solutions d'équations différentielles: il est donc tout naturel, en se plaçant sur le point de vue de la Physique mathématique, de déduire leurs propriétés directement à partir des équations différentielles qui constituent la définition mathématique du problème posé. Les auteurs se sont donc attachés à mettre au point une méthode grâce à laquelle la théorie des fonctions spéciales se développe au départ d'une équation différentielle du type

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)} u' + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)} u = 0, \tag{1}$$

où $\sigma(z)$ et $\tilde{\sigma}(z)$ sont deux polynômes de degré non supérieur à 2 et $\tilde{\tau}(z)$ est un polynôme de degré non supérieur à 1. L'équation (1) admet à titre de cas particuliers des équations différentielles qui conduisent aux fonctions spéciales usitées en Physique mathématique et en Mécanique quantique.

L'architecture du livre est la suivante. Dans le premier chapitre nous définissons une classe de transformations $u = \varphi(z)\, y$ qui permettent, par un choix particulier de la fonction $\varphi(z)$, de passer de (1) à une autre équation de même type, mais plus simple

$$\sigma(z)\, y'' + \tau(z)\, y' + \lambda y = 0 \tag{2}$$

dans laquelle $\tau(z)$ est un polynôme de degré non supérieur à 1 et $\lambda$ est une constante.

Nous dirons que (2) est une *équation du type hypergéométrique*, et ses solutions, des *fonctions du type hypergéométrique*. La théorie de ces fonctions sera développée dans l'ordre suivant. On commence par montrer que les dérivées d'une fonction du type hypergéométrique sont elles aussi des fonctions du type hypergéométrique. Ayant établi cette propriété, on construit la famille des solutions particulières de l'équation (2) qui correspondent à telle ou telle valeur de $\lambda$, en partant de la solution évidente de (2) : $y(z) = \text{const}$ pour $\lambda = 0$. Chaque solution est un polynôme en $z$. Une généralisation naturelle de la représentation intégrale de ces polynômes nous conduit à la représentation intégrale des fonctions quelconques du type hypergéométrique, quelle que soit la valeur de $\lambda$. De cette dernière représentation, en passant de (2) à d'autres équations de même type, on déduit toutes les propriétés principales des fonctions envisagées : développements en séries de puissances, représentations asymptotiques, relations de récurrence, relations fonctionnelles. La théorie développée permet de trouver toutes les solutions de l'équation (1).

Dans les chapitres II, III et IV nous mettons en pratique ce programme sur des fonctions concrètes du type hypergéométrique, à savoir : les polynômes orthogonaux classiques, les fonctions sphériques, les fonctions cylindriques, les fonctions hypergéométriques. Une fois le premier chapitre assimilé, le lecteur peut donc passer à n'importe lequel des chapitres II à IV, selon ses préférences. Quant au chapitre V, il est entièrement consacré aux applications.

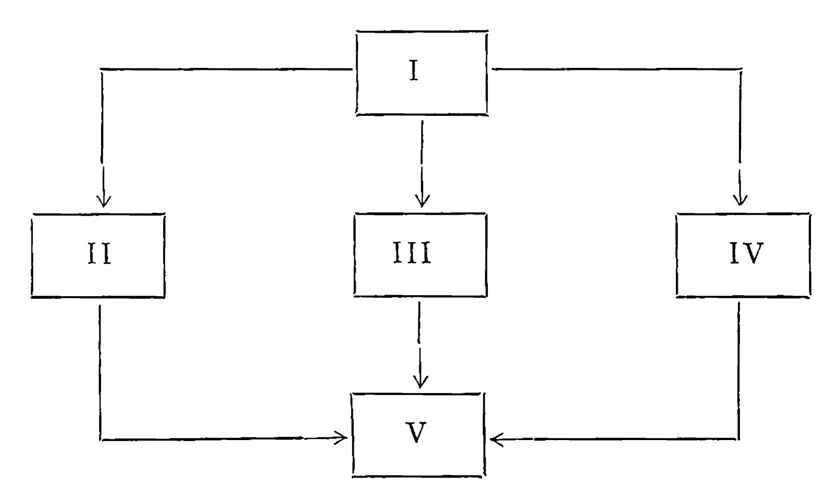
Les formules sont numérotées de façon autonome à l'intérieur de chaque paragraphe. Les renvois à des formules d'autres paragraphes sont donnés en indiquant le numéro du paragraphe concerné. Les exercices et exemples traités sont partie intégrante du texte.

Il est à noter que presque tous les types de problèmes de Mécanique quantique qui admettent une solution sous forme explicite sont examinés dans le présent ouvrage ; les solutions en sont cherchées par une méthode unique. Les physiciens apprécieront une relation remarquablement simple que nous établissons entre les coefficients de Glebsch-Gordan, largement utilisés en Mécanique quantique, et les polynômes orthogonaux d'une variable discrète, plus

exactement les polynômes de Hahn.

La connaissance des propriétés de la fonction gamma d'Euler étant indispensable à l'étude des fonctions spéciales, au livre est annexé un appendice consacré à la théorie de la fonction gamma. On a jugé utile d'y exposer les propriétés de l'intégrale de Laplace, dont on fait usage en construisant le prolongement analytique ou en établissant les représentations asymptotiques des fonctions spéciales, et de joindre un Rappel des formules principales. Pour plus de détails, nous recommandons au lecteur l'ouvrage capital en trois volumes de G. Bateman et A. Erdélyi [1] qui renferme la totalité des formules concernant la théorie des fonctions spéciales qui étaient établies vers le milieu des années quarante. Les livres [23] et [25] sont également très précieux à cet égard.

Une table des matières détaillée permet de se faire une idée assez nette du contenu et de l'organisation de l'ouvrage. L'organigramme suivant indique la dépendance relative des chapitres :




La méthode que nous proposons pour l'étude des fonctions spéciales est un développement de la méthode que nous avions exposée dans notre livre *Eléments de théorie des fonctions spéciales* paru en russe aux éditions « Naouka » (1974) et en français aux éditions « Mir » (1975). Elle permet d'assimiler la théorie des fonctions spéciales dès la lecture des trois premiers paragraphes.

Presque toutes les questions évoquées avaient été traitées dans notre cours des méthodes de la Physique mathématique professé pendant de longues années à la faculté de Physique théorique et expérimentale de l'Institut des Ingénieurs physiciens de Moscou (MIFI), ainsi que dans des cours spéciaux lus aux facultés de Physique, de

Chimie, de Calcul mathématique et Cybernétique de l'Université de Moscou.

Les auteurs tiennent à exprimer leur profonde gratitude à l'académicien A. Samarski pour son attention bienveillante et pour le concours qu'il a constamment apporté tout au long du travail sur ce livre. Notre reconnaissance va aussi à T. Tsiroulis, V. Arsénine, B. Rojdestvenski, S. Souslov et aux collaborateurs de la chaire de Physique nucléaire théorique de MIFI, dont les observations pertinentes nous ont été précieuses pendant la rédaction de l'ouvrage.

*A. Nikiforov, V. Ouvarov*

CHAPITRE PREMIER

# ÉLÉMENTS DE THÉORIE DES FONCTIONS SPÉCIALES

## § 1. L'équation différentielle pour les fonctions spéciales

Dans un grand nombre de problèmes importants de la physique théorique et mathématique, on est conduit à l'équation différentielle

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)} u' + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)} u = 0 \tag{1}$$

dans laquelle $\sigma(z)$ et $\tilde{\sigma}(z)$ sont des polynômes de degré non supérieur à 2, et $\tilde{\tau}(z)$ un polynôme de degré non supérieur à 1. On rencontre des équations de ce type en résolvant les équations de Laplace et d'Helmholtz en coordonnées curvilignes par séparation des variables, dans les problèmes fondamentaux de la mécanique quantique : mouvement d'une particule dans un champ à symétrie sphérique, oscillateur harmonique, recherche des solutions d'équations de Schrödinger, de Dirac et de Klein-Gordon pour le potentiel coulombien, mouvement d'une particule dans un champ électrique ou magnétique homogène... L'équation (1) apparaît également dans bon nombre de problèmes modèles de la physique atomique, moléculaire et nucléaire.

Les équations du type (1) admettent comme solutions particulières des fonctions spéciales appartenant aux classes suivantes :

— polynômes orthogonaux classiques (polynômes de Jacobi, de Laguerre et d'Hermite) ;

— fonctions sphériques ;

— fonctions cylindriques ;

— fonctions hypergéométriques.

Ces fonctions sont souvent appelées *fonctions spéciales de la physique mathématique.*

Dans le texte qui suit, nous admettrons partout que la variable $z$ et les coefficients des polynômes $\sigma(z)$, $\tilde{\sigma}(z)$ et $\tilde{\tau}(z)$ sont susceptibles de prendre toute valeur réelle ou complexe.

Essayons de mettre l'équation (1) sous une forme plus simple au moyen du changement $u = \varphi(z)\, y$ et d'un choix particulier de la

2—0592

fonction $\varphi(z)$. Il vient

$$y'' + \left(2\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\tilde{\tau}}{\sigma}\right) y' + \left(\frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{\varphi'}{\varphi}\frac{\tilde{\tau}}{\sigma} + \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma^2}\right) y = 0. \tag{2}$$

En vue de rendre (2) plus simple que (1), on donnera au coefficient de $y'$ l'aspect $\tau(z)/\sigma(z)$, où $\tau(z)$ est un polynôme de degré non supérieur à 1. La fonction $\varphi(z)$ se définira alors par l'équation

$$\varphi'/\varphi = \pi(z)/\sigma(z), \tag{3}$$

dans laquelle

$$\pi(z) = \frac{1}{2}[\tau(z) - \tilde{\tau}(z)] \tag{4}$$

est un polynôme de degré non supérieur à 1. Puisque

$$\frac{\varphi''}{\varphi} = \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)' + \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)' + \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^2,$$

l'équation (2) devient

$$y'' + \frac{\tau(z)}{\sigma(z)} y' + \frac{\bar{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)} y = 0, \tag{5}$$

où

$$\tau(z) = \tilde{\tau}(z) + 2\pi(z), \tag{6}$$

$$\bar{\sigma}(z) = \tilde{\sigma}(z) + \pi^2(z) + \pi(z)[\tilde{\tau}(z) - \sigma'(z)] + \pi'(z)\sigma(z). \tag{7}$$

Les fonctions $\tau(z)$, $\bar{\sigma}(z)$ sont deux polynômes de degrés non supérieurs à 1 et à 2 respectivement. L'équation (5) est donc de même type que (1). Nous avons trouvé de cette façon la classe des transformations qui laissent inchangé le type de l'équation: ce sont les transformations qu'on fait subir à (1) en opérant le changement $u = \varphi(z) y$, où la fonction $\varphi(z)$ vérifie l'équation (3), quel que soit le polynôme du premier degré $\pi(z)$.

L'arbitraire dans le choix de $\pi(z)$ nous permettra de choisir, parmi les formes possibles de l'équation (5), celle qui est la plus simple et qui se prête le mieux à la discussion. Choisissons les coefficients du polynôme $\pi(z)$ de telle façon que le polynôme $\bar{\sigma}(z)$ figurant dans (5) soit un multiple exact de $\sigma(z)$, i.e.

$$\bar{\sigma}(z) = \lambda\sigma(z), \tag{8}$$

$\lambda$ étant une constante. Cela est possible, car, en identifiant les coefficients qui affectent les puissances correspondantes de $z$ dans les deux membres de l'égalité (8), on obtient trois équations pour trois constantes inconnues: la constante $\lambda$ et deux coefficients du polynôme $\pi(z)$. L'équation (5) deviendra donc

$$\sigma(z) y'' + \tau(z) y' + \lambda y = 0. \tag{9}$$

Nous dirons que (9) est une *équation du type hypergéométrique*, et ses solutions, des *fonctions du type hypergéométrique*. Il sera donc tout naturel d'appeler l'équation (1) *équation généralisée du type hypergéométrique* *).

Pour définir le polynôme $\pi(z)$ et la constante $\lambda$, mettons la condition (8) sous la forme

$$\pi^2 + (\tilde{\tau} - \sigma')\,\pi + \tilde{\sigma} - k\sigma = 0,$$

où

$$k = \lambda - \pi'(z). \tag{10}$$

Supposant provisoirement la constante $k$ connue, on peut expliciter $\pi(z)$ dans l'équation du second degré:

$$\pi(z) = \frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma} + k\sigma}\,. \tag{11}$$

$\pi(z)$ étant un polynôme, le radicande doit être le carré d'un polynôme. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que soit nul le discriminant du polynôme du second degré sous le signe de la racine. Cette condition nous conduit à l'équation, en général du second degré, pour la constante $k$.

Une fois $k$ trouvé, on cherche $\pi(z)$ par la formule (11), puis $\varphi(z)$, $\tau(z)$ et $\lambda$ à l'aide des formules (3), (6) et (10). Il est évident qu'il existe plus d'une possibilité de réduire l'équation (1) à l'équation du type hypergéométrique (9), possibilités fournies par le choix de la constante $k$ et celui du signe de $\pi(z)$ dans la formule (11).

Grâce à la transformation proposée, on aura à discuter, au lieu de l'équation (1), une équation plus simple du type (9).

*Exemple.* Mettons sous la forme (9) l'équation de Bessel

$$z^2u'' + zu' + (z^2 - \nu^2)\,u = 0$$

en faisant le changement $u = \varphi(z)\,y$. L'équation de Bessel est un cas particulier de l'équation (1) pour $\sigma(z) = z$, $\tilde{\tau}(z) = 1$, $\tilde{\sigma}(z) = z^2 - \nu^2$. Le radicande de (11) se présente alors sous la forme $-z^2 + \nu^2 + kz$. Annulant le discriminant de ce trinôme du second degré, on obtient l'équation pour la constante $k$:

$$k^2 + 4\nu^2 = 0,$$

d'où $k = \pm 2i\nu$. L'on a donc, en vertu de (11),

$$\pi(z) = \pm\sqrt{-z^2 + \nu^2 \pm 2i\,\nu z} = \pm(iz \pm \nu).$$

*) Si $\sigma(z)$ est un polynôme de degré 2, l'équation (1) est un cas particulier de l'équation de Riemann à trois points singuliers distincts dont l'un à l'infini. L'équation de Riemann est étudiée dans les cours de théorie analytique des équations différentielles. Voir [18], [19], ainsi que E. L. Ince, *Ordinary differential equations*, New York, Dover, 1956.

Ainsi donc, dans le cas considéré le polynôme $\pi(z)$ peut se mettre sous quatre formes différentes. Plaçons-nous dans le cas où $k = 2i\nu$, $\pi(z) = iz + \nu$ par exemple. Les formules (3), (6) et (10) nous donnent

$$\varphi(z) = z^{\nu} e^{iz},$$
$$\tau(z) = 2iz + 2\nu + 1,$$
$$\lambda = k + \pi'(z) = i(2\nu + 1).$$

L'équation (9) devient finalement

$$zy'' + (2iz + 2\nu + 1)\, y' + i(2\nu + 1)\, y = 0.$$

*Remarques.* 1. Puisque l'équation (1) ne change pas lorsqu'on multiplie $\sigma(z)$ et $\tilde{\tau}(z)$ par $c$ et $\tilde{\sigma}(z)$ par $c^2$ ($c$ étant une constante quelconque), on peut admettre que le coefficient affectant le terme de plus haut degré du polynôme $\sigma(z)$ est égal à un nombre donné. Cette remarque reste aussi vraie pour l'équation (9).

2. Dans la suite, on peut se borner à considérer les cas où, dans les équations (1) et (9), le polynôme $\sigma(z)$ n'admet pas de racines multiples. En effet, si le polynôme $\sigma(z)$ admet des racines multiples, i.e. $\sigma(z) = (z - a)^2$, il suffit de faire le changement $z - a = 1/s$ pour ramener l'équation (1) à la forme

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{2 - s\tilde{\tau}(a + 1/s)}{s} \frac{du}{ds} + \frac{s^2\tilde{\sigma}(a + 1/s)}{s^2} u = 0. \tag{12}$$

Les expressions $s\tilde{\tau}(a + 1/s)$ et $s^2\tilde{\sigma}(a + 1/s)$ sont deux polynômes de degré non supérieur à 1 et à 2 respectivement en $s$. Aussi l'équation (12) est-elle une équation du type (1) dont le polynôme $\sigma(s)$ est égal à $s$ et n'admet donc pas de racines multiples.

3. Il n'est pas possible de réduire l'équation (1) à une équation du type (9) par le procédé décrit si $\sigma(z) = 1$ et si l'expression $(\tilde{\tau}/2)^2 - \tilde{\sigma}$ est un polynôme du premier degré. Dans ce cas, pour réduire l'équation (1) à une forme plus simple, on peut choisir le polynôme $\pi(z)$ dans (3) de la condition $\tau(z) = 0$. Alors $\bar{\sigma}(z)$ devient un polynôme du premier degré, et l'équation (5) s'écrit

$$y'' + (az + b)\, y = 0. \tag{13}$$

Par un changement linéaire $s = az + b$, on ramène (13) à un cas particulier de l'équation

$$\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{1 - 2\alpha}{s} \frac{dy}{ds} + \left[(\beta\gamma s^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - \nu^2\gamma^2}{s^2}\right] y = 0, \tag{14}$$

dans laquelle $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\nu$ sont des constantes. Cette équation sera étudiée au § 13 (voir l'équation de Lommel). Les solutions de (14) s'expriment au moyen de fonctions cylindriques.

4. Un autre cas d'application des équations du type hypergéométrique est la solution des équations différentielles simultanées du premier ordre

$$\left.\begin{aligned} u_1' &= a_{11}(z)\,u_1 + a_{12}(z)\,u_2,\\ u_2' &= a_{21}(z)\,u_1 + a_{22}(z)\,u_2 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

aux coefficients

$$a_{ik}(z) = \frac{\tau_{ik}(z)}{\sigma(z)}, \tag{16}$$

où $\tau_{ik}(z)$ est un polynôme de degré non supérieur à 1, et $\sigma(z)$ un polynôme de degré non supérieur à 2. En éliminant la fonction $u_2(z)$ entre les équations (15), on obtient l'équation définissant $u_1(z)$:

$$u_1'' - \left(a_{11} + a_{22} + \frac{a_{12}'}{a_{12}}\right) u_1' + \left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + a_{11}\frac{a_{12}'}{a_{12}} - a_{11}'\right) u_1 = 0. \tag{17}$$

Puisque

$$\frac{a_{12}'}{a_{12}} = -\frac{\sigma'}{\sigma} + \frac{\tau_{12}'}{\tau_{12}},$$

l'équation (17) sera une équation du type hypergéométrique pour $\tau_{12}' = 0$. Si $\tau_{12}' \neq 0$, on peut effectuer une transformation linéaire

$$v_1 = \alpha u_1 + \beta u_2,$$
$$v_2 = \gamma u_1 + \delta u_2,$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ étant des constantes. On obtient alors un système d'équations du type

$$\left.\begin{aligned} v_1' &= \tilde{a}_{11}(z)\,v_1 + \tilde{a}_{12}(z)\,v_2,\\ v_2' &= \tilde{a}_{21}(z)\,v_1 + \tilde{a}_{22}(z)\,v_2. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

où les fonctions $\tilde{a}_{ik}(z)$ sont des combinaisons linéaires des fonctions $a_{ik}(z)$ à coefficients constants dépendant de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$; elles s'écrivent donc

$$\tilde{a}_{ik}(z) = \frac{\tilde{\tau}_{ik}(z)}{\sigma(z)},$$

$\tilde{\tau}_{ik}(z)$ est un polynôme de degré non supérieur à 1.

En choisissant les coefficients $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ de façon à avoir $\tilde{\tau}_{12}' = 0$ (ce qui est toujours possible), on obtient, après avoir éliminé la fonction $v_2(z)$ entre les équations (18), une équation généralisée du type hypergéométrique pour la fonction $v_1(z)$.

Au cas où $\sigma(z)$ est un polynôme du premier degré, on peut passer de l'équation (15) à l'équation généralisée du type hypergéométrique

par un procédé différent, en choisissant les constantes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ de telle façon que le coefficient $\tilde{a}_{12}$ soit indépendant de $z$, i.e. $\tilde{\tau}_{12} = \nu\sigma(z)$ ($\nu$ étant une constante).

## § 2. Polynômes du type hypergéométrique

Discutons l'équation du type hypergéométrique

$$\sigma(z)\,y'' + \tau(z)\,y' + \lambda y = 0. \tag{1}$$

Montrons que les *dérivées d'ordre quelconque des fonctions du type hypergéométrique sont encore des fonctions du type hypergéométrique.*

A cet effet, dérivons l'équation (1). Nous obtiendrons une fonction $v_1(z) = y'(z)$ qui vérifiera l'équation

$$\sigma(z)\,v_1'' + \tau_1(z)\,v_1' + \mu_1 v_1 = 0 \tag{2}$$

dans laquelle

$$\tau_1(z) = \tau(z) + \sigma'(z),$$
$$\mu_1 = \lambda + \tau'(z).$$

Puisque $\tau_1(z)$ est un polynôme de degré non supérieur à 1 et que $\mu_1$ est indépendant de $z$, l'équation (2) est bien une équation du type hypergéométrique.

La réciproque est aussi vraie: *chaque solution de l'équation* (2) *pour* $\lambda \neq 0$ *est dérivée d'une solution de l'équation* (1).

Soit, en effet, $v_1(z)$ une solution de (2). Si elle était dérivée d'une solution $y(z)$ de l'équation (1), ces deux fonctions devraient vérifier la relation suivante (voir (1)):

$$y(z) = -\frac{1}{\lambda}\left[\sigma(z)\,v_1' + \tau(z)\,v_1\right].$$

Montrons que la fonction $y(z)$ obtenue par cette formule vérifie l'équation (1) et que sa dérivée se confond avec $v_1(z)$. On a

$$\lambda y' = -\left[\sigma(z)\,v_1'' + \tau_1(z)\,v_1' + \tau'(z)\,v_1\right] = \lambda v_1,$$

donc effectivement $y' = v_1(z)$. En portant $v_1 = y'$ dans l'expression initiale de $y(z)$, on retrouve l'équation (1) pour $y(z)$.

D'une façon analogue, on peut obtenir par récurrence, pour toute fonction $v_n(z) = y^{(n)}(z)$, une équation du type hypergéométrique

$$\sigma(z)\,v_n'' + \tau_n(z)\,v_n' + \mu_n v_n = 0 \tag{3}$$

dans laquelle

$$\tau_n(z) = \tau(z) + n\sigma'(z),$$
$$\mu_n = \lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma''.$$

Toute solution de (3), pour $\mu_k \neq 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, se laisse représenter d'ailleurs sous la forme $v_n(z) = y^{(n)}(z)$, où $y(z)$ est une solution de l'équation (1).

Grâce à la propriété considérée, on peut construire la famille des solutions particulières de (1) pour des valeurs déterminées de $\lambda$. En effet, pour $\mu_n = 0$ l'équation (3) admet une solution particulière $v_n(z) = \text{const}$. Puisque $v_n(z) = y^{(n)}(z)$, cela revient à dire que pour

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''$$

l'équation du type hypergéométrique admet une solution particulière $y(z) = y_n(z)$ qui est un polynôme de degré $n$. De telles solutions seront appelées *polynômes du type hypergéométrique*. Les polynômes $y_n(z)$ sont, dans un certain sens, les solutions les plus élémentaires de l'équation (1) *).

Afin d'expliciter le polynôme $y_n(z)$, multiplions les équations (1) et (3) par des fonctions $\rho(z)$ et $\rho_n(z)$ qui permettent d'écrire ces équations sous forme auto-adjointe:

$$(\sigma\rho y')' + \lambda\rho y = 0, \tag{4}$$

$$(\sigma\rho_n v_n')' + \mu_n\rho_n v_n = 0 \tag{5}$$

Ici les fonctions $\rho(z)$, $\rho_n(z)$ vérifient les équations différentielles

$$(\sigma\rho)' = \tau\rho, \tag{6}$$

$$(\sigma\rho_n)' = \tau_n\rho_n. \tag{7}$$

En faisant intervenir l'expression explicite de $\tau_n(z)$, on établit sans peine une relation entre les fonctions $\rho_n(z)$ et $\rho_0(z) \equiv \rho(z)$. On a

$$(\sigma\rho_n)'/\rho_n = \tau + n\sigma' = (\sigma\rho)'/\rho + n\sigma',$$

d'où

$$\rho_n'/\rho_n = \rho'/\rho + n\sigma'/\sigma$$

et donc

$$\rho_n(z) = \sigma^n(z)\,\rho(z) \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{8}$$

Cherchons maintenant l'expression explicite des polynômes du type hypergéométrique $y_n(z)$. Comme $\sigma\rho_n = \rho_{n+1}$ et $v_n(z) = y^{(n)}(z)$, l'équation (5) se laisse transcrire sous la forme

$$\rho_n v_n = -\frac{1}{\mu_n}(\rho_{n+1}v_{n+1})'.$$

*) L'existence d'une solution polynomiale de l'équation (1) ressort par ailleurs du fait que l'opérateur $\sigma(z)\,d^2/dz^2 + \tau(z)\,d/dz$ transforme tout polynôme de degré $n$ en un polynôme de même degré.

D'où, pour $m < n$, on déduit successivement

$$\rho_m v_m = -\frac{1}{\mu_m}(\rho_{m+1}v_{m+1})' =$$
$$= \left(-\frac{1}{\mu_m}\right)\left(-\frac{1}{\mu_{m+1}}\right)(\rho_{m+2}v_{m+2})'' = \ldots = \frac{A_m}{A_n}(\rho_n v_n)^{(n-m)},$$

où

$$A_n = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \mu_k, \quad A_0 = 1. \tag{9}$$

Si la fonction $y(z)$ est un polynôme de degré $n$, i.e. $y = y_n(z)$, il vient

$$v_n(z) = y^{(n)}(z) = \text{const},$$

et l'on exprime $y_n^{(m)}(z)$ comme suit:

$$y_n^{(m)}(z) = \frac{A_{mn}B_n}{\rho_m(z)}[\rho_n(z)]^{(n-m)}, \tag{10}$$

où

$$A_{mn} = A_m(\lambda)|_{\lambda=\lambda_n}, \; B_n = \frac{1}{A_{nn}} y_n^{(n)}(z). \tag{11}$$

On en déduit en particulier, pour $m = 0$, l'expression explicite des polynômes du type hypergéométrique $y_n(z)$:

$$y_n(z) = \frac{B_n}{\rho(z)}[\sigma^n(z)\rho(z)]^{(n)} \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{12}$$

Ainsi donc, la formule (12) définit les solutions polynomiales de l'équation (1) d'une façon univoque, à un facteur de normalisation près. Ces solutions correspondent aux valeurs $\mu_n = 0$, i.e.

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{13}$$

La relation (12) est appelée *formule de Rodrigues*, du nom de son auteur qui l'a établie en 1814 pour un cas particulier des polynômes du type hypergéométrique, à savoir pour les polynômes de Legendre avec $\sigma(z) = 1 - z^2$ et $\rho(z) = 1$.

## § 3. Représentations intégrales des fonctions du type hypergéométrique

Cherchons à présent, à l'aide d'une généralisation de la formule de Rodrigues, les solutions particulières de l'équation du type hypergéométrique

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0$$

en donnant à $\lambda$ des valeurs quelconques. A cet effet, mettons d'abord sous une autre forme l'égalité (12) du § 2 pour les solutions polynomiales de l'équation du type hypergéométrique, en faisant inter-

venir la formule intégrale de Cauchy pour les dérivées d'une fonction analytique:

$$y_n(z)=\frac{C_n}{\rho(z)}\int_C \frac{\sigma^n(s)\,\rho(s)}{(s-z)^{n+1}}\,ds. \tag{1}$$

Ici $C_n = \frac{B_n n!}{2\pi i}$, $C$ est un contour fermé autour du point $s = z$, et la fonction $\rho(z)$ est solution de l'équation $(\sigma\rho)' = \tau\rho$.

La représentation (1) de la solution particulière pour $\lambda = \lambda_n$ de l'équation du type hypergéométrique donne lieu à penser qu'on peut en chercher la solution particulière, pour une valeur quelconque de $\lambda$, sous la forme

$$y(z)=y_\nu(z)=\frac{C_\nu}{\rho(z)}\int_C \frac{\sigma^\nu(s)\,\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}}\,ds, \tag{2}$$

où $C_\nu$ est une constante de normalisation et la quantité $\nu$ est liée à la constante $\lambda$ par une relation analogue à la relation (13) du § 2:

$$\lambda=-\nu\tau'-\frac{\nu(\nu-1)}{2}\sigma''. \tag{3}$$

Montrons qu'on peut toujours choisir un contour $C$ (que nous supposerons non fermé en général) tel que notre hypothèse soit vraie.

THÉORÈME 1. *Supposons que la fonction* $\rho(z)$ *vérifie l'équation*

$$[\sigma(z)\,\rho(z)]' = \tau(z)\,\rho(z),$$

$\nu$ *soit racine de l'équation* $\lambda = -\nu\tau' - \frac{\nu(\nu-1)}{2}\sigma''$, $u(z) = \int_C \frac{\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+1}}\,ds$, $\rho_\nu(s) = \sigma^\nu(s)\,\rho(s)$. *Alors l'équation du type hypergéométrique* $\sigma(z)\,y'' + \tau(z)\,y' + \lambda y = 0$ *admet des solutions particulières de la forme*

$$y(z)\equiv y_\nu(z)=\frac{C_\nu}{\rho(z)}\,u(z)$$

(*où* $C_\nu$ *est une constante de normalisation*) *si*:

1° *en calculant* $u'(z)$ *et* $u''(z)$, *les opérations de dérivation par rapport à* $z$ *et d'intégration suivant* $s$ *peuvent être permutées, i.e.*

$$u'(z)=(\nu+1)\int_C \frac{\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+2}}\,ds,$$

$$u''(z)=(\nu+1)(\nu+2)\int_C \frac{\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+3}}\,ds;$$

2° *le contour C est choisi en sorte que*

$$\left.\frac{\sigma^{\nu+1}(s)\,\rho(s)}{(s-z)^{\nu+2}}\right|_{s_1}^{s_2}=0, \tag{4}$$

*où* $s_1$, $s_2$ *sont les extrémités du contour* $C$.

D é m o n s t r a t i o n. Déduisons l'équation différentielle pour la fonction $u(z)$. A cet effet, utilisons l'équation pour la fonction $\rho_\nu(s)$:

$$[\sigma(s)\,\rho_\nu(s)]' = \tau_\nu(s)\,\rho_\nu(s),$$

où $\tau_\nu(s) = \tau(s) + \nu\sigma'(s)$ (cf. la formule (7) du § 2). Multiplions les deux membres de l'équation par $\frac{1}{(s-z)^{\nu+2}}$ et l'intégrons ensuite par parties le long du contour $C$:

$$\left.\frac{\sigma(s)\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+2}}\right|_{s_1}^{s_2}+(\nu+2)\int_C\frac{\sigma(s)\,\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+3}}\,ds=\int_C\frac{\tau_\nu(s)\,\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+2}}\,ds.$$

Le premier terme est nul en vertu de la condition 2° du théorème. Développons les polynômes $\sigma(s)$ et $\tau_\nu(s)$ suivant les puissances de $(s-z)$:

$$\sigma(s)=\sigma(z)+\sigma'(z)(s-z)+\frac{1}{2}\sigma''(z)(s-z)^2,$$

$$\tau_\nu(s)=\tau_\nu(z)+\tau_\nu'(z)(s-z).$$

Nous servant des formules pour $u(z)$, $u'(z)$ et $u''(z)$, nous aboutissons à l'équation

$$\frac{1}{\nu+1}\sigma(z)\,u''+\frac{\nu+2}{\nu+1}\sigma'(z)\,u'+\frac{\nu+2}{2}\sigma''u=\frac{1}{\nu+1}\tau_\nu(z)\,u'+\tau_\nu' u.$$

Portons dans cette équation l'expression explicite de $\tau_\nu(z)$. Il vient

$$\sigma(z)\,u''+[2\sigma'(z)-\tau(z)]\,u'-(\nu+1)\left(\tau'+\frac{\nu-2}{2}\sigma''\right)u=0. \tag{5}$$

Etablissons maintenant, à l'aide de (5), l'équation pour la fonction $y_\nu(z)$. Puisque

$$u(z)=\frac{1}{C_\nu}\rho(z)\,y_\nu(z),\qquad \frac{\rho'}{\rho}=\frac{\tau-\sigma'}{\sigma}$$

et compte tenu du fait que (5) est une équation généralisée du type hypergéométrique (1) du § 1 pour

$$\tilde{\tau}(z)=2\sigma'(z)-\tau(z),\quad \tilde{\sigma}(z)=-(\nu+1)\left(\tau'+\frac{\nu-2}{2}\sigma''\right)\sigma(z),$$

on peut appliquer la transformation considérée dans le § 1 en posant

$$\varphi(z)=\frac{1}{C_\nu}\rho(z),\quad \pi(z)=\tau(z)-\sigma'(z).$$

On obtient alors pour la fonction $y_\nu(z)$ l'équation suivante (cf. l'équation (5) du § 1):

$$y_\nu'' + \frac{\tau(z)}{\sigma(z)} y_\nu' + \frac{\bar{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)} y_\nu = 0,$$

où

$$\bar{\sigma}(z) = \tilde{\sigma}(z) + \pi^2(z) + \pi(z)[\tilde{\tau}(z) - \sigma'(z)] + \pi'(z)\sigma(z) = \\ = \left[-\nu\tau' - \frac{\nu(\nu-1)}{2}\sigma''\right]\sigma(z) = \lambda\sigma(z)$$

(en définissant la constante $\nu$ à l'aide de la formule (3)).

L'équation obtenue est évidemment identique à

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

Le théorème démontré présente une importance capitale pour l'étude des fonctions spéciales concrètes.

Remarquons que la condition (4) du théorème est vérifiée, en particulier, si les extrémités du contour $C$ sont choisies de façon à annuler la fonction $\frac{\sigma^{\nu+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+2}}$, i.e.

$$\left.\frac{\sigma^{\nu+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+2}}\right|_{s=s_1,\ s_2} = 0. \tag{6}$$

Considérons quelques types de contours $C$ vérifiant la condition (6).

a) Soit $s_0$ racine de l'équation $\sigma(s) = 0$. Si l'on a $\sigma^{\nu+1}(s)\rho(s)|_{s=s_0} = 0$, on peut prendre comme une des extrémités du contour le point $s = s_0$.

b) Si $\mathrm{Re}(\nu + 2) < 0$, on peut choisir le point $s = z$ pour une des extrémités du contour.

c) On peut enfin choisir comme extrémité du contour la valeur $s = \infty$ si

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\sigma^{\nu+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+2}} = 0.$$

Nous pouvons construire de cette façon plusieurs solutions particulières de l'équation du type hypergéométrique qui répondront aux différents tracés du contour $C$ et aux différentes valeurs de $\nu$. Le nombre de solutions particulières peut être augmenté en faisant intervenir la transformation décrite au § 1. En effet, l'équation du type hypergéométrique $\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0$ peut être assimilée à l'équation généralisée du type hypergéométrique (1) du § 1 avec $\tilde{\sigma}(z) = \lambda\sigma(z)$, $\tilde{\tau}(z) = \tau(z)$. En appliquant la transformation mentionnée, on obtient d'autres équations du type hypergéométri-

que. Après avoir construit les solutions particulières pour ces dernières, on peut effectuer la transformation réciproque et obtenir de nouvelles solutions particulières pour l'équation initiale. Etant donné qu'une équation du type hypergéométrique ne peut admettre que deux solutions linéairement indépendantes, toute solution de celle-ci est une combinaison linéaire de deux solutions linéairement indépendantes. En particulier, on peut chercher par ce procédé les relations fonctionnelles pour des fonctions du type hypergéométrique.

En cherchant les solutions de l'équation du type hypergéométrique, nous nous bornerons à choisir des contours assez simples, constitués par des droites ou des segments de droites joignant les points $s_1$ et $s_2$, qui vérifient la condition (6). Pour le faire, on doit généralement imposer certaines contraintes aux coefficients de l'équation différentielle du type hypergéométrique. Les résultats obtenus avec ces contraintes pourront cependant être étendus à des cas plus généraux en faisant le prolongement analytique des solutions construites.

Rappelons la notion de prolongement analytique, qui va jouer un rôle important dans le texte qui suit *). Soit une fonction $f(z)$ définie sur un ensemble $E$ appartenant à un domaine $D$. Si une fonction $F(z)$ est analytique dans $D$ et se confond avec $f(z)$ sur $E$, on dit que $F(z)$ est le *prolongement analytique* de la fonction $f(z)$ dans le domaine $D$. On a le

PRINCIPE DU PROLONGEMENT ANALYTIQUE: *si l'ensemble $E$ contient au moins un point limite intérieur au domaine $D$, la fonction $f(z)$ admet au plus un prolongement dans $D$.*

En particulier, le prolongement analytique est unique si $E$ est un segment contenu dans $D$.

Ici et par la suite, nous entendons par fonction analytique une fonction analytique univalente. De telles fonctions s'appellent aussi parfois *fonctions régulières*. Par conséquent, chaque fois que la fonction cesse d'être univalente, nous ferons des coupures le long de certaines lignes dans le plan complexe, de façon à pouvoir nous établir sur une branche déterminée de la fonction analytique multivalente.

En calculant des expressions du type $(z - a)^\alpha$, l'argument de la quantité complexe élevée à la puissance sera pris aussi petit en module que le permet la coupure effectuée. Par exemple, pour s'établir sur une branche déterminée de la fonction $(1 - z)^\alpha (1 + z)^\beta$ qui a des points de ramification pour $z = -1$ et $z = +1$, il suffit de faire la coupure le long de l'axe réel pour $z \geqslant -1$. On calcule donc la fonction $(1 - z)^\alpha$ pour $|\arg (1 - z)| < \pi$, et la fonction $(1 + z)^\beta$, pour $0 < \arg z < 2\pi$, conformément à la coupure pratiquée.

*) Ces questions sont développées dans [8], [13], [15].

Puisque les solutions de l'équation du type hypergéométrique se présenteront sous la forme (2) (représentation intégrale), le prolongement analytique des solutions de cette équation par rapport aux paramètres et à la variable indépendante aura lieu en vertu du théorème suivant qui démontre l'analyticité d'une intégrale dépendant d'un paramètre *).

THÉORÈME 2. *Soient $C$ une courbe différentiable par morceaux située à distance finie dans le plan de la variable complexe $s$, et $D$ un domaine dans le plan complexe de $z$. Si la fonction $f(z, s)$ est continue pour l'ensemble des variables avec $s \in C$ et $z \in D$ et si elle est analytique en $z$ dans $D$ pour tout $s \in C$, la fonction*

$$F(z) = \int_C f(z, s)\, ds$$

*sera analytique dans $D$ et l'on aura*

$$F'(z) = \int_C f'_z(z, s)\, ds.$$

Le théorème reste vrai aussi pour des intégrales impropres uniformément convergentes $F(z)$. En étudiant les représentations intégrales des différentes fonctions spéciales, on se servira utilement d'un critère bien simple de convergence uniforme des intégrales: *si, pour tout $s \in C$ et pour tout $z \in D$, la fonction continue $f(z, s)$ vérifie l'inégalité $|f(z, s)| \leqslant \varphi(s)$ et l'intégrale $\int_C \varphi(s)\, |ds|$ est convergente, l'intégrale $\int_C f(z, s)\, ds$ sera uniformément convergente en $z$ dans le domaine $D$.*

Puisque les dérivées des fonctions du type hypergéométrique $y = y(z)$ sont à leur tour des fonctions du même type, en prolongeant par analyticité les fonctions $y(z)$, on donne par là même un prolongement analytique aux fonctions $y'(z)$ et $y''(z)$ par rapport à la variable $z$ et aux paramètres dont ces fonctions dépendent. Nous avons construit la représentation intégrale pour la fonction du type hypergéométrique $y(z)$ sous la condition que cette fonction vérifie l'équation du type hypergéométrique

$$\sigma(z)\, y'' + \tau(z)\, y' + \lambda y = 0,$$

en imposant certaines contraintes à la variable $z$ et aux paramètres dont cette fonction dépend. En vertu du principe du prolongement analytique, la fonction $y(z)$ vérifie cette condition dans tout le do-

*) Le lecteur trouvera la démonstration de ce théorème dans [8], [13], [15].

maine d'analyticité du premier membre de l'équation (le second membre, qui est nul, est analytique dans n'importe quel domaine) *).

Dans le texte qui suit, en étudiant les solutions de telle ou telle équation concrète du type hypergéométrique, on utilisera la représentation intégrale (2); à l'aide du principe du prolongement analytique, les résultats obtenus seront étendus à un domaine plus vaste-

## § 4. Relations de récurrence et formules de dérivation

Considérons une méthode générale utile pour établir diverses relations entre les fonctions $y_\nu(z)$ définies par la représentation intégrale (2) du § 3. Etablissons d'abord une relation entre les fonctions de la forme

$$\varphi_{\nu\mu}(z) = \int\limits_C \frac{\sigma^\nu(s)\,\rho(s)}{(s-z)^{\mu+1}}\,ds$$

présentes dans les expressions des fonctions $y_\nu(z)$ et de leurs dérivées.

LEMME. *Trois fonctions quelconques* $\varphi_{\nu_i\mu_i}(z)$ *vérifient ensemble les relations linéaires*

$$\sum_{i=1}^{3} A_i(z)\,\varphi_{\nu_i\mu_i}(z) = 0$$

*aux coefficients polynomiaux* $A_i(z)$ *si les différences* $\nu_i - \nu_j$ *et* $\mu_i - \mu_j$ *sont des entiers et si l'on a*

$$\left.\frac{\sigma^{\nu_0+1}(s)\,\rho(s)}{(s-z)^{\mu_0}}\,s^m\right|_{s_1}^{s_2} = 0 \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

*où* $s_1$, $s_2$ *sont les extrémités du contour* $C$; $\nu_0$ *est celui des nombres* $\nu_i$ *qui présente la plus petite partie réelle*; $\mu_0$ *est celui des nombres* $\mu_i$ *qui présente la plus grande partie réelle.*

D é m o n s t r a t i o n. Considérons l'expression

$$\sum_{i=1}^{3} A_i\varphi_{\nu_i\mu_i}(z).$$

Montrons qu'il est possible de choisir les coefficients $A_i = A_i(z)$ de façon à annuler la combinaison considérée. Pour toute valeur

*) Remarquons qu'il est possible de définir le domaine d'analyticité des solutions de l'équation du type hypergéométrique directement d'après la forme de l'équation différentielle, en s'appuyant sur la théorie analytique des équations différentielles (voir par exemple [18]) : les points singuliers de l'équation du type hypergéométrique sont les racines de l'équation $\sigma(z) = 0$ auxquelles s'ajoute un point à l'infini.

fixée de $z$ on a

$$\sum_i A_i \varphi_{\nu_i \mu_i}(z) = \int_C \frac{\sigma^{\nu_0}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\mu_0+1}} P(s)\, ds,$$

où

$$P(s) = \sum_i A_i \sigma^{\nu_i - \nu_0}(s)(s-z)^{\mu_0 - \mu_i},$$

et $\nu_0$, $\mu_0$ sont définis dans l'énoncé du lemme. Puisque les différences $\nu_i - \nu_0$ et $\mu_0 - \mu_i$ sont des entiers non négatifs, la fonction $P(s)$ est un polynôme en $s$. Choisissons les coefficients $A_i$ de façon à vérifier l'égalité

$$\frac{\sigma^{\nu_0}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\mu_0+1}} P(s) = \frac{d}{ds}\left[\frac{\sigma^{\nu_0+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\mu_0}} Q(s)\right] \tag{1}$$

dans laquelle $Q(s)$ est un polynôme (la possibilité d'un tel choix des coefficients sera démontrée un peu plus tard). Il vient alors

$$\sum_i A_i \varphi_{\nu_i \mu_i}(z) = \frac{\sigma^{\nu_0+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\mu_0}} Q(s)\Big|_{s_1}^{s_2}.$$

Comme aux extrémités du contour $C$ on a la condition

$$\frac{\sigma^{\nu_0+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\mu_0}} s^m \Big|_{s_1}^{s_2} = 0 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

l'expression $\frac{\sigma^{\nu_0+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\mu_0}} Q(s)\Big|_{s_1}^{s_2}$ s'annule et on aura, pour les coefficients $A_i$ ainsi choisis, la relation linéaire

$$\sum_i A_i \varphi_{\nu_i \mu_i}(z) = 0. \tag{2}$$

Montrons qu'on peut toujours choisir les coefficients du polynôme $Q(s)$ et les coefficients $A_i$ de façon à vérifier l'égalité (1). A cet effet, donnons à (1) une forme plus commode en utilisant pour la fonction $\rho_\nu(s) = \sigma^\nu(s)\rho(s)$ l'équation différentielle $(\sigma\rho_\nu)' = \tau_\nu \rho_\nu$, où $\tau_\nu(s) = \tau(s) + \nu\sigma'(s)$. Il vient alors

$$P(s) = Q(s)\left[(s-z)\tau_{\nu_0}(s) - \mu_0\sigma(s)\right] + \sigma(s)(s-z)Q'(s). \tag{3}$$

En confrontant le premier et le second membre de cette égalité, on s'assure sans peine que la puissance du polynôme $Q(s)$ est de deux unités inférieure à celle du polynôme $P(s)$.

En identifiant les coefficients des mêmes puissances de $s$ dans le premier et le second membre de (3), nous obtiendrons un système d'équations linéaires homogènes par rapport aux coefficients inconnus du polynôme $Q(s)$ et aux coefficients $A_i$ $(i = 1, 2, 3)$ figurant dans l'expression de $P(s)$. Le nombre des équations est de deux

unités supérieur à celui des coefficients inconnus du polynôme $Q(s)$. Les inconnues de (3) étant au nombre d'une unité supérieur à celui des équations, on pourra choisir un des coefficients cherchés égal à une constante. Ce raisonnement reste vrai également dans le cas où $P(s)$ est un polynôme de degré non supérieur à 1 à condition de poser $Q(s) = 0$. Puisque, dans le système d'équations obtenu, les coefficients affectant les inconnues sont des polynômes en $z$, le choix de l'un des coefficients constant fait que les autres seront des fonctions rationnelles de $z$. Multipliant l'égalité (2) par le dénominateur commun des coefficients $A_i(z)$, nous retrouvons bien une relation linéaire aux coefficients polynomiaux. Le lemme est démontré. ■

En appliquant ce procédé pour abaisser le degré du polynôme $P(s)$, on se sert parfois de l'intégration par parties pour certaines fonctions $\varphi_{\nu_i \mu_i}(z)$. On a

$$\varphi_{\nu\mu}(z) = \int_C \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^{\mu+1}} ds =$$

$$= -\frac{1}{\mu} \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^\mu}\Bigg|_{s_1}^{s_2} + \frac{1}{\mu}\int_C \frac{\tau_{\nu-1}(s)\sigma^{\nu-1}(s)\rho(s)}{(s-z)^\mu} ds,$$

où $\tau_{\nu-1}(s) = \tau(s) + (\nu-1)\sigma'(s)$. En supposant comme d'ordinaire que le premier terme du second membre s'annule on obtient

$$\varphi_{\nu\mu}(z) = \frac{1}{\mu}\int_C \frac{\tau_{\nu-1}(s)\sigma^{\nu-1}(s)\rho(s)}{(s-z)^\mu} ds. \qquad (4)$$

*Exemple* 1. Cherchons la relation entre les fonctions $\varphi_{\nu,\nu-1}(z)$, $\varphi_{\nu\nu}(z)$ et $\varphi_{\nu,\nu+1}(z)$.

On a en l'occurrence $\nu_0 = \nu$, $\mu_0 = \nu + 1$, $P(s) = A_1(s-z)^2 + A_2(s-z) + A_3$, $Q(s) = q_0$ ($q_0$ est une constante). La condition

$$\frac{\sigma^{\nu_0+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\mu_0}} Q(s)\Bigg|_{s_1}^{s_2} = 0,$$

qu'on a imposée au cours de la démonstration du lemme aux extrémités du contour, est équivalente dans ce cas à la condition

$$\frac{\sigma^{\nu+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}}\Bigg|_{s_1}^{s_2} = 0.$$

L'égalité (3) se présente comme suit:

$$A_1(s-z)^2 + A_2(s-z) + A_3 = q_0[(s-z)\tau_\nu(s) - (\nu+1)\sigma(s)].$$

En posant $q_0 = 1$ et en développant le second membre de cette égalité suivant les puissances de $(s-z)$, on obtient après avoir identi-

ié les coefficients affectant les différentes puissances de $(s - z)$:

$$A_1 = \tau'_\nu - \frac{\nu+1}{2}\sigma'' = \tau' + \frac{\nu-1}{2}\sigma'',$$
$$A_2 = \tau_\nu(z) - (\nu+1)\sigma'(z) = \tau(z) - \sigma'(z), \qquad (5)$$
$$A_3 = -(\nu+1)\sigma(z).$$

On a donc

$$A_1(z)\varphi_{\nu,\nu-1}(z) + A_2(z)\varphi_{\nu\nu}(z) + A_3(z)\varphi_{\nu,\nu+1}(z) = 0, \qquad (6)$$

où les coefficients $A_i(z)$ sont définis par (5). Mettons cette relation sous une forme légèrement différente. Puisque

$$y_\nu(z) = \frac{C_\nu}{\rho(z)}\varphi_{\nu\nu}(z), \quad \varphi_{\nu,\nu+1}(z) = \frac{1}{\nu+1}\varphi'_{\nu\nu}(z),$$
$$[\sigma(z)\rho(z)]' = \tau(z)\rho(z),$$

la relation (6) conduit à une représentation intégrale commode pour les dérivées des fonctions du type hypergéométrique:

$$y'_\nu(z) = \frac{C_\nu^{(1)}}{\sigma(z)\rho(z)}\int_C \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^\nu}ds, \qquad (7)$$

où

$$C_\nu^{(1)} = \left(\tau' + \frac{\nu-1}{2}\sigma''\right)C_\nu.$$

En généralisant la relation (7) ci-dessus on obtient une représentation intégrale commode pour des dérivées d'ordre quelconque des fonctions du type hypergéométrique. En effet, soit une fonction du type hypergéométrique:

$$y_\nu(z) = \frac{C_\nu}{\rho(z)}\int_C \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}}ds = \frac{C_\nu}{\rho(z)}\varphi_{\nu\nu}(z). \qquad (8)$$

La relation (7) se laisse interpréter comme suit: il est possible de déduire la représentation intégrale de la dérivée première de cette fonction à partir de la représentation intégrale initiale, en remplaçant $\nu$ par $\nu - 1$, $\rho(z)$ par $\rho_1(z) = \sigma(z)\rho(z)$ et en multipliant par un facteur supplémentaire $\tau' + \frac{\nu-1}{2}\sigma''$. Il est clair donc que

$$y_\nu^{(k)}(z) = \frac{C_\nu^{(k)}}{\sigma^k(z)\rho(z)}\varphi_{\nu,\nu-k}(z), \qquad (9)$$

où

$$C_\nu^{(k)} = \left(\tau'_{k-1} + \frac{\nu-k}{2}\sigma''\right)C_\nu^{(k-1)} = \left(\tau' + \frac{\nu+k-2}{2}\sigma''\right)C_\nu^{(k-1)} =$$
$$= \prod_{s=0}^{k-1}\left(\tau' + \frac{\nu+s-1}{2}\sigma''\right)C_\nu.$$

Les représentations intégrales (9) et le lemme démontré plus haut donnent lieu au

THÉORÈME. *Trois fonctions quelconques* $y_{\nu_i}^{(k_i)}(z)$ *vérifient ensemble une relation linéaire de la forme*

$$\sum_{i=1}^{3} A_i(z)\, y_{\nu_i}^{(k_i)}(z) = 0$$

*aux coefficients polynomiaux* $A_i(z)$ *si les différences* $\nu_i - \nu_j$ *sont des entiers et si l'on a*

$$\left.\frac{\sigma^{\nu_0+1}(s)\,(\rho)\,(s)}{(s-z)^{\mu_0+1}}\, s^m \right|_{s_1}^{s_2} = 0 \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

*Ici* $s_1$, $s_2$ *sont les extrémités du contour* $C$; $\nu_0$ *est la valeur de* $\nu_i$ *qui présente la plus petite partie ré lle*; $\mu_0$ *est la valeur de* $\mu_i$ *qui présente la plus grande partie réelle.*

Remarquons que les équations définissant les coefficients $A_i(z)$ sont linéaires et homogènes par rapport aux coefficients inconnus et ne dépendent pas du choix du contour $C$ pour les fonctions $y_\nu(z)$. Pour cette raison, *deux fonctions du type hypergéométrique* $y_\nu(z)$ *qui ne diffèrent entre elles que par un facteur indépendant de* $\nu$ *et par le choix du contour* $C$, *vérifient des relations du type considéré avec les mêmes coefficients.*

*Exemple 2.* Proposons-nous d'établir une relation de la forme

$$A_1 y'_\nu(z) + A_2 y_{\nu+1}(z) + A_3 y_\nu(z) = 0 \tag{10}$$

entre les fonctions $y'_\nu(z)$, $y_\nu(z)$ et $y_{\nu+1}(z)$. Dans le texte qui suit, les formules exprimant les dérivées des fonctions du type hypergéométrique à l'aide des fonctions elles-mêmes seront appelées *formules de dérivation.*

Pour déduire la formule (10), nous ferons intervenir les représentations intégrales (7) et (8) pour $y'_\nu(z)$, $y_\nu(z)$ et transformons l'expression de $y_{\nu+1}(z)$ à l'aide de (4). Le premier membre de l'égalité (10) s'écrira alors comme suit:

$$A_1 y'_\nu(z) + A_2 y_{\nu+1}(z) + A_3 y_\nu(z) = \frac{1}{\rho(z)} \int_C \frac{\sigma^\nu(s)\,\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}}\, P(s)\, ds,$$

où

$$P(s) = \left[A_1 \frac{C_\nu \varkappa_\nu}{\sigma(z)}(s-z) + A_2 \frac{C_{\nu+1}\tau_\nu(s)}{\nu+1} + A_3 C_\nu\right],$$

$$\varkappa_\nu = \tau' + \frac{\nu-1}{2}\sigma''.$$

Puisque $P(s)$ est un polynôme du premier degré en $s$, on a $Q(s) = 0$, donc

$$A_1 \frac{C_\nu \varkappa_\nu}{\sigma(z)}(s-z) + A_2 \frac{C_{\nu+1}\tau_\nu(s)}{\nu+1} + A_3 C_\nu = 0.$$

Pour définir les coefficients $A_1$, $A_2$, $A_3$, posons $A_1 = \sigma(z)$, développons le premier membre de l'égalité suivant les puissances de $(s-z)$ et identifions les coefficients qui affectent les mêmes puissances de $(s-z)$. On obtient

$$A_2 = -(\nu+1)\frac{\varkappa_\nu}{\tau'_\nu}\frac{C_\nu}{C_{\nu+1}}, \quad A_3 = \varkappa_\nu \frac{\tau_\nu(z)}{\tau'_\nu}.$$

En définitive on obtient une formule de dérivation:

$$\sigma(z)\, y'_\nu(z) = \frac{\varkappa_\nu}{\tau'_\nu}\left[(\nu+1)\frac{C_\nu}{C_{\nu+1}}\, y_{\nu+1}(z) - \tau_\nu(z)\, y_\nu(z)\right]. \tag{11}$$

En particulier, pour les polynômes du type hypergéométrique

$$y_n(z) = \frac{B_n}{\rho(z)}\frac{d^n}{dz^n}[\sigma^n(z)\,\rho(z)]$$

on a $\nu = n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, $C_n = \frac{n!}{2\pi i} B_n$ (voir formule (1) du § 3). Aussi la formule de dérivation (11) se laisse-t-elle récrire en l'occurrence comme suit:

$$\sigma(z)\, y'_n(z) = \frac{\varkappa_n}{\tau'_n}\left[\frac{B_n}{B_{n+1}}\, y_{n+1}(z) - \tau_n(z)\, y_n(z)\right], \tag{12}$$

où

$$\tau_n(z) = \tau(z) + n\sigma'(z), \quad \varkappa_n = \tau' + \frac{n+1}{2}\sigma'' = -\frac{\lambda_n}{n}.$$

Nous avons donc étudié, dans ce premier chapitre, une méthode pour construire les représentations intégrales des solutions particulières de l'équation généralisée du type hypergéométrique et indiqué les moyens de discussion de cette équation. L'exposé des éléments de théorie des fonctions spéciales est terminé. Dans le chapitre suivant nous étudierons les polynômes orthogonaux classiques, qui constituent une des classes les plus importantes des fonctions spéciales de la physique mathématique.

CHAPITRE II

# POLYNÔMES ORTHOGONAUX CLASSIQUES

## § 5. Définition et propriétés principales

**1. Polynômes de Jacobi, de Laguerre et d'Hermite.** Nous avons introduit au § 2 les polynômes du type hypergéométrique $y_n(z)$ qui sont solutions de l'équation

$$\sigma(z)\, y'' + \tau(z)\, y' + \lambda y = 0 \tag{1}$$

pour $\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''$. Ces polynômes se laissent expliciter par la *formule de Rodrigues*

$$y_n(z) = \frac{B_n}{\rho(z)}\,[\sigma^n(z)\,\rho(z)]^{(n)} \tag{2}$$

dans laquelle $B_n$ est une constante de normalisation et la fonction $\rho(z)$ vérifie l'équation différentielle

$$[\sigma(z)\,\rho(z)]' = \tau(z)\,\rho(z). \tag{3}$$

En résolvant (3), nous obtenons trois formes possibles de la fonction $\rho(z)$ (à un facteur constant près), en fonction du degré du polynôme $\sigma(z)$:

$$\rho(z) = \begin{cases} (b-z)^{\alpha}(z-a)^{\beta} & \text{pour} \quad \sigma(z) = (b-z)(z-a), \\ (z-a)^{\alpha}\, e^{\beta z} & \text{pour} \quad \sigma(z) = z-a, \\ e^{\alpha z^2+\beta z} & \text{pour} \quad \sigma(z) = 1. \end{cases}$$

Ici $a$ et $b$, $\alpha$ et $\beta$ sont des constantes (complexes dans le cas général). Par un changement linéaire de la variable indépendante, on peut donner aux expressions de $\sigma(z)$ et de $\rho(z)$ les formes canoniques suivantes (à un facteur constant près):

$$\rho(z) = \begin{cases} (1-z)^{\alpha}(1+z)^{\beta} & \text{pour} \quad \sigma(z) = 1-z^2, \\ z^{\alpha} e^{-z} & \text{pour} \quad \sigma(z) = z, \\ e^{-z^2} & \text{pour} \quad \sigma(z) = 1. \end{cases}$$

Avec un tel changement les équations (1) et (3) se transforment en équations de même type, tandis que les polynômes correspondants

du type hypergéométrique $y_n(z)$ restent des polynômes par rapport à la nouvelle variable et se définissent comme précédemment par la formule de Rodrigues (2).

En fonction de la forme de $\sigma(z)$, on obtient les systèmes de polynômes suivants:

1) Soient $\sigma(z) = 1 - z^2$, $\rho(z) = (1-z)^\alpha (1+z)^\beta$. Alors

$$\tau(z) = -(\alpha+\beta+2)z + \beta - \alpha.$$

Les polynômes correspondants $y_n(z)$ pour $B_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$ *) s'appellent *polynômes de Jacobi* et se notent $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-z)^{-\alpha}(1+z)^{-\beta}\frac{d^n}{dz^n}[(1-z)^{n+\alpha}(1+z)^{n+\beta}].$$

Les polynômes suivants sont des cas particuliers importants des polynômes de Jacobi:

a) les *polynômes de Legendre* $P_n(z) = P_n^{(0,0)}(z)$;

b) les *polynômes de Tchébychev de 1^re^ et de 2^e^ espèces*:

$$T_n(z) = \frac{n!}{(1/2)_n} P_n^{(-1/2,\,-1/2)}(z),$$

$$U_n(z) = \frac{(n+1)!}{(3/2)_n} P_n^{(1/2,\,1/2)}(z);$$

c) les *polynômes de Gegenbauer*, appelés parfois *polynômes ultrasphériques*,

$$C_n^\lambda(z) = \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda+1/2)_n} P_n^{(\lambda-1/2,\,\lambda-1/2)}(z).$$

Nous avons utilisé la notation

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)},$$

où $\Gamma(z)$ est la fonction gamma (voir Appendice A).

2) Soient $\sigma(z) = z$, $\rho(z) = z^\alpha e^{-z}$. Alors

$$\tau(z) = -z + \alpha + 1.$$

Les polynômes $y_n(z)$ pour $B_n = 1/n!$ s'appellent *polynômes de Laguerre* et se notent $L_n^\alpha(z)$:

$$L_n^\alpha(z) = \frac{1}{n!} e^z z^{-\alpha} \frac{d^n}{dz^n}(z^{\alpha+n}e^{-z}).$$

3) Soient $\sigma(z) = 1$, $\rho(z) = e^{-z^2}$. Alors $\tau(z) = -2z$. Les polynômes $y_n(z)$ pour $B_n = (-1)^n$ s'appellent *polynômes d'Hermite* et se notent $H_n(z)$:

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n}(e^{-z^2}).$$

---

*) Le choix des constantes $B_n$ est traditionnel et, au fond, assez arbitraire. Il correspond à la normalisation adoptée dans [1].

Nous avons omis de considérer le cas où le polynôme $\sigma(z)$ admet des racines multiples, $\sigma(z) = (z - a)^2$. Parmi les polynômes du type hypergéométrique qui correspondent à ce cas, les plus connus sont les *polynômes de Bessel* pour lesquels

$$\sigma(z) = z^2, \quad \tau(z) = 2(z+1), \quad \rho(z) = e^{-2/z}$$

et la formule de Rodrigues s'écrit

$$y_n(z) = 2^{-n} e^{2/z} \frac{d^n}{dz^n} (z^{2n} e^{-2/z}).$$

Les polynômes de Bessel vérifient la condition de normalisation $y_n(0) = 1$.

Les polynômes du type hypergéométrique correspondant à $\sigma(z) = (z-a)^2$ peuvent être exprimés au moyen des polynômes de Laguerre à l'aide de la remarque 2 du § 1. Nous avons vu, en effet, que pour $\sigma(z) = (z-a)^2$ le changement $s = 1/(z-a)$ transforme l'équation généralisée du type hypergéométrique

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)} u' + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)} u = 0$$

en une équation de même type pour laquelle $\sigma(s) = s$. En particulier, l'équation

$$\sigma(z) y'' + \tau(z) y' + \lambda_n y = 0 \quad \left(\lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2} \sigma''\right)$$

pour les polynômes du type hypergéométrique dans le cas de $\sigma(z) = (z-a)^2$ se ramène à

$$\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{2 - s\tau(a + 1/s)}{s} \frac{dy}{ds} + \frac{\lambda_n}{s^2} y = 0$$

à la suite du changement $s = 1/(z-a)$. On a vu en outre, dans le § 1, que le changement $y = \varphi(s) u$ permet de réduire cette équation à une équation du type hypergéométrique, à condition de choisir convenablement la fonction $\varphi(s)$. Une des formes possibles de $\varphi(s)$ est $\varphi(s) = 1/s^n$. Puisque

$$\tau(z) = \tau(a) + \tau'(z)(z-a),$$

on a $\tau(a + 1/s) = \tau(a) + \tau'/s$, et l'on obtient l'équation suivante pour la fonction $u(s)$:

$$su'' - [s\tau(a) + \tau' + 2(n-1)] u' + n\tau(a) u = 0.$$

Puisque $u(s) = s^n y$ et la fonction $y$ est un polynôme de degré $n$ en $z = a + 1/s$, la fonction $u(s)$ est un polynôme de degré $n$ en $s$. Ainsi donc, la fonction $u(s)$ est un polynôme du type hypergéométrique. Comme, dans le cas considéré, la fonction $\rho(s)$, définissant les polynômes du type hypergéométrique d'après la formule de Rodrigues, se présente sous la forme

$$\rho(s) = s^{-\tau' - 2n + 1} e^{-\tau(a) s},$$

les polynômes $u(s) = u_n(s)$ se confondent à un facteur de normalisation près, pour $\tau(a) \neq 0$, avec les polynômes de Laguerre $L_n^{\alpha}(t)$, où $\alpha = -\tau' - 2n + 1$, $t = \tau(a) s$. Les polynômes $y_n(z)$ sont donc liés aux polynômes de Laguerre par la relation suivante:

$$y_n(z) = C_n (z-a)^n L_n^{-\tau' - 2n + 1} \left(\frac{\tau(a)}{z-a}\right).$$

Cette formule reste vraie aussi pour $\tau(a) = 0$. Pour les polynômes de Bessel, elle s'écrira

$$y_n(z) = \frac{(-1)^n n!}{2^n} z^n L_n^{-(2n+1)}\left(\frac{2}{z}\right).$$

**2. Dérivées des polynômes du type hypergéométrique.** Les résultats obtenus permettent de dégager certaines propriétés des dérivées des polynômes du type hypergéométrique.

1) *Les dérivées $y_n^{(m)}(z)$ sont des polynômes du type hypergéométrique*, car elles sont des polynômes de degré $(n - m)$ et vérifient une équation du type hypergéométrique. Nous avons établi au § 2 la formule de Rodrigues pour $y_n^{(m)}(z)$:

$$y_n^{(m)}(z) = \frac{A_{mn}B_n}{\sigma^m(z)\rho(z)} \frac{d^{n-m}}{dz^{n-m}}[\sigma^n(z)\rho(z)], \tag{4}$$

où

$$A_{mn} = (-1)^m \prod_{k=0}^{m-1} \mu_{kn} \quad (A_{0n} = 1, \ \mu_{kn} = \mu_k(\lambda)|_{\lambda=\lambda_n}).$$

Puisque

$$\mu_{kn} = \lambda_n + k\tau' + \frac{k(k-1)}{2}\sigma'' = -(n-k)\left(\tau' + \frac{n+k-1}{2}\sigma''\right),$$

on a

$$A_{mn} = \frac{n!}{(n-m)} \prod_{k=0}^{m-1}\left(\tau' + \frac{n+k-1}{2}\sigma''\right). \tag{5}$$

2) Des formules de Rodrigues pour les polynômes $y_n(z)$ et leurs dérivées $y_n'(z)$ on déduit les *formules de dérivation* pour les polynômes de Jacobi, de Laguerre et d'Hermite:

$$\begin{aligned} dP_n^{(\alpha,\beta)} &= \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta) P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(z), \\ \frac{dL_n^{\alpha}}{dz} &= -L_{n-1}^{\alpha+1}(z), \\ \frac{dH_n}{dz} &= 2nH_{n-1}(z). \end{aligned} \tag{6}$$

Comme on l'a vu au § 4 (voir exemple 2), les dérivées $y_n'(z)$ des polynômes du type hypergéométrique sont liées aux polynômes eux-mêmes $y_n(z)$ par les relations

$$\sigma(z) y_n'(z) = \frac{\varkappa_n}{\tau_n'}\left[\frac{B_n}{B_{n+1}} y_{n+1}(z) - \tau_n(z) y_n(z)\right], \tag{7}$$

dans lesquelles

$$\tau_n(z) = \tau(z) + n\sigma'(z), \quad \varkappa_n = \tau' + \frac{n-1}{2}\sigma''.$$

**3. Orthogonalité des polynômes du type hypergéométrique.** En imposant certaines contraintes à la fonction $\rho(z)$, on met en évidence quelques propriétés spéciales des polynômes du type hypergéométrique $y_n(z)$.

THÉORÈME. *Supposons que la fonction* $\rho(z)$ *vérifie, aux extrémités d'un intervalle* $(a, b)$, *la condition*

$$\sigma(z)\rho(z)z^k|_{z=a,\,b}=0 \quad (k=0, 1, \ldots). \tag{8}$$

*Alors les polynômes du type hypergéométrique* $y_n(z)$ *correspondant aux différentes valeurs de* $\lambda_n$ *seront orthogonaux sur l'intervalle* $]a, b[$ *par rapport au poids* $\rho(z)$, *i.e.*

$$\int_a^b y_n(z)\,y_m(z)\,\rho(z)\,dz=0 \quad (\lambda_m\neq\lambda_n).$$

D é m o n s t r a t i o n. Considérons les équations différentielles pour les polynômes $y_n(z)$ et $y_m(z)$:

$$[\sigma(z)\rho(z)y_n']'+\lambda_n\rho(z)y_n=0,$$
$$[\sigma(z)\rho(z)y_m']'+\lambda_m\rho(z)y_m=0.$$

Multiplions la première par $y_m(z)$ et la seconde par $y_n(z)$. Retranchons la seconde égalité de la première et intégrons le résultat entre $a$ et $b$. Puisque

$$y_m(z)[\sigma(z)\rho(z)y_n'(z)]'-y_n(z)[\sigma(z)\rho(z)y_m'(z)]'=$$
$$=\frac{d}{dz}\{\sigma(z)\rho(z)W[y_m(z), y_n(z)]\},$$

où $W(u, v)=\begin{vmatrix} u & v\\ u' & v'\end{vmatrix}$ est le wronskien, nous obtenons l'égalité suivante:

$$(\lambda_m-\lambda_n)\int_a^b y_m(z)\,y_n(z)\,\rho(z)\,dz=\sigma(z)\rho(z)W[y_m(z), y_n(z)]|_a^b.$$

Puisque le wronskien $W[y_m(z), y_n(z)]$ est un polynôme en $z$, le second membre de l'égalité obtenue s'annule en vertu de la condition (8). Il vient donc pour $\lambda_m\neq\lambda_n$

$$\int_a^b y_m(z)\,y_n(z)\,\rho(z)\,dz=0, \tag{9}$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

Les polynômes du type hypergéométrique $y_n(z)$ pour lesquels la fonction $\rho(z)$ vérifie la condition (8) sont appelés *polynômes orthogonaux classiques*. En étudiant ces polynômes, on se donne générale-

ment une condition supplémentaire $\rho(z) > 0$ et $\sigma(z) > 0$ sur l'intervalle $]a, b[$. Ces conditions seront vérifiées par les polynômes de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(z)$ pour $a = -1$, $b = 1$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$; par les polynômes de Laguerre $L_n^\alpha(z)$ pour $a = 0$, $b = +\infty$, $\alpha > -1$; par les polynômes d'Hermite $H_n(z)$ pour $a = -\infty$, $b = +\infty$. Remarquons que, dans les cas considérés, la condition $\lambda_m \neq \lambda_n$ dans (9) peut être remplacée par la condition équivalente $m \neq n$.

Les propriétés des dérivées des polynômes du type hypergéométrique (voir n° 2) donnent lieu à la proposition suivante: *les dérivées $y_n^{(m)}(z)$ des polynômes orthogonaux classiques sont à leur tour des polynômes classiques, orthogonaux sur l'intervalle $]a, b[$ par rapport au poids $\rho_m(z) = \sigma^m(z)\rho(z)$.*

Les caractéristiques énoncées des polynômes de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(z)$, de Laguerre $L_n^\alpha(z)$ et d'Hermite $H_n(z)$ sont résumées dans le tableau 1.

*Tableau 1*

**Polynômes de Jacobi, de Laguerre et d'Hermite (standardisation)**

| $y_n(z)$ | $]a, b[$ | $\rho(z)$ | $\sigma(z)$ | $\tau(z)$ | $\lambda_n$ | $B_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_n^{(\alpha, \beta)}(z)$ | $(-1, 1)$ | $(1-z)^\alpha \times$ $\times (1+z)^\beta$ | $1-z^2$ | $-(\alpha+\beta+2)z+$ $+\beta-\alpha$ | $n(n+\alpha+$ $+\beta+1)$ | $\frac{(-1)^n}{2^n n!}$ |
| $L_n^\alpha(z)$ | $(0, \infty)$ | $z^\alpha e^{-z}$ | $z$ | $-z+\alpha+1$ | $n$ | $\frac{1}{n!}$ |
| $H_n(z)$ | $(-\infty, \infty)$ | $e^{-z^2}$ | $1$ | $-2z$ | $2n$ | $(-1)^n$ |

**4. Fonctions génératrices.** Par *fonction génératrice* pour un système de polynômes du type hypergéométrique $\{y_n(z)\}$ on entend une fonction $\Phi(z, t)$ développable, pour des $t$ suffisamment petits, en série suivant les puissances de $t$ sous la forme

$$\Phi(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{y}_n(z)}{n!} t^n, \tag{10}$$

où $\bar{y}_n(z)$ est le polynôme du type hypergéométrique pour lequel la constante $B_n$ dans la formule de Rodrigues (2) est égale à l'unité, i.e.

$$\bar{y}_n(z) = \frac{1}{\rho(z)} \frac{d^n}{dz^n} [\sigma^n(z)\rho(z)]$$

(on a évidemment $y_n(z) = B_n \bar{y}_n(z)$). On a en vertu de l'égalité (1) du § 3

$$\bar{y}_n(z) = \frac{1}{\rho(z)} \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{\sigma^n(z)\,\rho(s)}{(s-z)^{n+1}}\,ds, \tag{11}$$

où $C$ est un contour fermé autour du point $s = z$ (en admettant que la fonction $\rho(s)$ est analytique dans le domaine limité par $C$). Portons dans (10) l'expression (11) de $\bar{y}_n(z)$ et permutons la sommation et l'intégration:

$$\Phi(z, t) = \frac{1}{2\pi i \rho(z)} \int_C \frac{\rho(s)}{s-z} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\sigma(s)\,t}{s-z} \right]^n \right\} ds.$$

Le changement de l'ordre de ces deux opérations pour des $t$ suffisamment petits et un $z$ fixe se justifie sans peine. En sommant la progression géométrique sous le signe somme, on obtient

$$\Phi(z, t) = \frac{1}{2\pi i \rho(z)} \int_C \frac{\rho(s)\,ds}{s-z-\sigma(s)t}.$$

Le dénominateur de l'expression sous le signe somme admet en général deux racines. Si $t \to 0$, une des racines tend vers $s = z$. Alors l'autre racine (si elle existe) tend vers l'infini. Aussi, pour des $t$ suffisamment petits, peut-on admettre que le domaine délimité par le contour $C$ ne contient qu'une seule racine $s = \xi(z, t)$ du dénominateur de l'expression sous le signe somme, et que la fonction à intégrer n'admet à l'intérieur de $C$ qu'un pôle du premier ordre avec un résidu égal à

$$C_{-1} = \frac{\rho(s)}{1-\sigma'(s)\,t} \bigg|_{s=\xi(z,\,t)}.$$

La fonction $\Phi(z, t)$ s'écrira donc définitivement sous la forme

$$\Phi(z, t) = \frac{\rho(s)}{\rho(z)} \frac{1}{1-\sigma'(s)\,t} \bigg|_{s=\xi(z,\,t)}. \tag{12}$$

Ici $\xi(z, t)$ est celle des racines de l'équation quadratique (en $s$) $s - z - \sigma(s)\,t = 0$ qui est voisine de $s = z$ pour des $t$ petits.

La formule (12) de la fonction $\Phi(z, t)$ figurant dans le développement (10) a été établie pour des valeurs suffisamment petites de $|t|$. En vertu du principe du prolongement analytique, le développement (10) reste vrai dans le domaine d'analyticité en $t$ du premier et du second membres de (10), i.e. dans le cercle $|t| < R$, où $R$ est la distance, à l'origine des coordonnées, du point singulier le plus proche de la fonction $\Phi(z, t)$ (pour une valeur fixe de $z$).

Cherchons, à titre d'exemple, la fonction génératrice pour les polynômes de Legendre. On a dans le cas considéré

$$\xi(z, t) = \frac{-1+\sqrt{1+4t(t+z)}}{2t};$$

il vient donc, d'après la formule (12),

$$\Phi(z, t) = \frac{1}{1+2st}\bigg|_{s=\xi(z,\, t)} = \frac{1}{\sqrt{1+4tz+4t^2}}.$$

Puisque pour les polynômes de Legendre, on a $B_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$, il vient

$$\frac{1}{\sqrt{1+4tz+4t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)(-2t)^n.$$

Changeant $t$ en $-t/2$, on retrouve l'expression usuelle de la fonction génératrice:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tz+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\, t^n. \tag{13}$$

La série (13) est convergente pour $|t| < 1$ si $-1 \leqslant z \leqslant 1$, car les points singuliers de la fonction génératrice, qui sont racines de l'équation $1 - 2tz + t^2 = 0$, se définissent par l'expression

$$t_{1,2} = e^{\pm i\varphi} \quad (\cos\varphi = z)$$

et appartiennent à la circonférence $|t| = 1$.

En physique théorique on rencontre fréquemment l'expression (13) sous la forme

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_<^n}{r_>^{n+1}} P_n(\cos\theta),$$

où $r_< = \min(r_1, r_2)$, $r_> = \max(r_1, r_2)$, $\theta$ est l'angle entre les rayons vecteurs $\boldsymbol{r}_1$ et $\boldsymbol{r}_2$. En effet,

$$|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta} =$$

$$= \begin{cases} r_1 \sqrt{1 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 2\frac{r_2}{r_1}\cos\theta} & (r_2 < r_1), \\ r_2 \sqrt{1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - 2\frac{r_1}{r_2}\cos\theta} & (r_1 < r_2), \end{cases}$$

d'où

$$|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| = r_> \sqrt{1 + \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2 - 2\frac{r_<}{r_>}\cos\theta}$$

et donc

$$\frac{1}{|r_1-r_2|}=\frac{1}{r_> \sqrt{1+\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2-2\frac{r_<}{r_>}\cos\theta}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_<^n}{r_>^{n+1}}P_n(\cos\theta).$$

Pour les polynômes de Laguerre et d'Hermite, les formules (10) et (12) nous donnent les développements suivants:

$$(1-t)^{-\alpha-1}\exp\left(-\frac{zt}{1-t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{\alpha}(z)\,t^n,$$

$$\exp(2zt-t^2)=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(z)\frac{t^n}{n!}.$$

## § 6. Quelques propriétés générales des polynômes orthogonaux

Les polynômes orthogonaux classiques présentent toute une série de propriétés qui découlent directement de leur propriété d'orthogonalité. Il s'agira de polynômes quelconques qui sont orthogonaux sur un intervalle $]a, b[$ par rapport à un poids quelconque $\rho(x) > 0$.

Considérons quelques propriétés générales des polynômes $p_n(x)$ orthogonaux sur un intervalle $]a, b[$ par rapport à un poids $\rho(x)$ et vérifiant les égalités

$$\int_a^b p_n(x)\,p_m(x)\,\rho(x)\,dx=0 \quad (m\neq n).$$

Il sera supposé que le coefficient affectant le terme de plus haut degré du polynôme $p_n(x)$ est réel et distinct du zéro ($n$ étant le degré du polynôme).

**1. Développement d'un polynôme quelconque suivant des polynômes orthogonaux.** Montrons qu'*on peut toujours mettre un polynôme quelconque $q_n(x)$ de degré $n$ sous forme d'une combinaison linéaire de polynômes orthogonaux $p_k(x)$* ($k = 0, 1, \ldots, n$), i.e.

$$q_n(x)=\sum_{k=0}^{n}c_{kn}p_k(x). \qquad (1)$$

Pour $n = 0$ la proposition est immédiate. Pour $n > 0$ quelconque, la démonstration sera faite par récurrence. Supposons qu'il existe, pour un polynôme quelconque $q_{n-1}(x)$, le développement

$$q_{n-1}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}c_{k,\,n-1}p_k(x). \qquad (2)$$

Pour le polynôme $q_n(x)$, choisissons la constante $c_{nn}$ de telle façon que le coefficient affectant le terme de plus haut degré du polynôme $q_n(x) - c_{nn}p_n(x)$ soit égal à zéro, i.e. $q_n(x) - c_{nn}p_n(x) = q_{n-1}(x)$. En faisant intervenir le développement (2), on retrouve pour $q_n(x)$ le développement (1).

Les coefficients $c_{kn}$ dans (1) se cherchent très facilement à l'aide de la propriété d'orthogonalité

$$\int_a^b p_n(x)\, p_m(x)\, \rho(x)\, dx = 0 \quad (m \neq n) \tag{3}$$

par la formule

$$c_{kn} = \frac{1}{d_k^2} \int_a^b q_n(x)\, p_k(x)\, \rho(x)\, dx \tag{4}$$

dans laquelle

$$d_k^2 = \int_a^b p_k^2(x)\, \rho(x)\, dx$$

est le carré de la norme.

Montrons que la relation d'orthogonalité (3) est équivalente à la relation

$$\int_a^b p_n(x)\, x^m \rho(x)\, dx = 0 \quad (m < n). \tag{5}$$

En effet, en développant, dans l'intégrale (3), le polynôme $p_m(x)$ suivant les puissances de $x$, pour $m < n$, on prouve (3) à partir de (5). De même, en développant $x^m$ suivant les polynômes orthogonaux $p_k(x)$, on prouve (5) si (3) est vrai.

Il ressort de la relation (5) que *le polynôme $p_n(x)$ est orthogonal à un polynôme quelconque de degré plus petit.*

**2. Unicité d'un système de polynômes orthogonaux par rapport à un poids donné.** On montre que *la donnée d'un intervalle* $]a, b[$ *et d'un poids* $\rho(x)$ *suffit pour définir les polynômes* $p_n(x)$, *vérifiant la relation d'orthogonalité* (5), *de façon univoque, à un facteur de normalisation près.*

Supposons qu'il existe deux polynômes $p_n(x)$, $\tilde{p}_n(x)$ vérifiant (5). On a

$$\tilde{p}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{kn} p_k(x).$$

En vertu des relations (4) et (5), on a $c_{kn} = 0$ pour $k < n$, d'où proportionnalité des polynômes $p_n(x)$ et $\tilde{p}_n(x)$.

Pour les polynômes $p_n(x)$, on a une expression explicite sous forme d'un déterminant:

$$p_n(x) = A_n \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & \dots & C_n \\ C_1 & C_2 & \dots & C_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n-1} & C_n & \dots & C_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix}, \qquad (6)$$

où $A_n$ est une constante de normalisation, et $C_k = \int\limits_a^b x^k \rho(x)\,dx$ est le moment de la fonction poids $\rho(x)$. On montre, en effet, que les polynômes (6) vérifient les relations d'orthogonalité (5) *).

En considérant la forme explicite (6) des polynômes $p_n(x)$, on voit que *le polynôme $p_n(x)$ est un polynôme à coefficients réels.*

*Exemple.* Grâce à la propriété d'unicité des polynômes orthogonaux par rapport à un poids donné, on établit l'expression pour les polynômes de Tchébychev de première espèce $T_n(x)$ orthogonaux sur l'intervalle $]-1, 1[$ par rapport au poids $(1-x^2)^{-1/2}$.

Faisons dans (3) le changement $x = \cos\varphi$. Il vient

$$\int\limits_0^\pi T_n(\cos\varphi)\, T_m(\cos\varphi)\, d\varphi = 0 \qquad (n \neq m).$$

On sait d'autre part que

$$\int\limits_0^\pi \cos n\varphi \cos m\varphi \, d\varphi = 0 \qquad (n \neq m).$$

Puisque $\cos n\varphi$ est un polynôme de degré $n$ en $\cos\varphi$, il en ressort que les polynômes $\cos n\varphi = \cos(n \arccos x)$ et $T_n(x)$ sont proportionnels entre eux. Comme $T_n(1) = 1$ (voir § 7, n° 2), on a $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. Le coefficient affectant la puissance de plus haut degré du polynôme $T_n(x)$ est égal à $2^{n-1}$ (voir § 7, n° 1).

Les polynômes $\overline{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ sont largement utilisés dans les problèmes relatifs à l'approximation des fonctions et dans la théorie générale des méthodes itératives. Cela tient à ce que, de tous les polynômes $q_n(x)$ de degré $n$ dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à l'unité, les polynômes $\overline{T}_n(x)$ s'écartent le

*) Le coefficient de $x^n$ dans (6) est distinct de zéro chaque fois que $A_n \neq 0$, car il est proportionnel au déterminant de Gram pour les fonctions $1, x, \dots, x^{n-1}$, cf. I. Guelfand, *Lessons on linear algebra*, Pergamon Press, 1960.

moins du zéro sur le segment $[-1, 1]$; autrement dit, l'expression

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |q_n(x)|$$

admet son minimum sur les polynômes

$$\overline{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n\varphi, \quad \varphi = \arccos x.$$

En effet, le polynôme $\overline{T}_n(x)$ prend dans les points $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $x_k = \cos\frac{k\pi}{n} (k = 0, 1, \ldots, n)$, des valeurs alternées égales en module à $\max\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |\overline{T}_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$. De ce fait, si l'on suppose qu'il existe un polynôme $p_n(x)$ dont le terme de plus haut degré est affecté d'un coefficient unité et qui pour $x \in [-1, 1]$ vérifie la condition

$$-\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |\overline{T}_n(x)| < p_n(x) < \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |T_n(x)|,$$

le polynôme $\overline{T}_n(x) - p_n(x)$ de degré $n - 1$ admettrait en $x_0, x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$ des valeurs alternées et aurait $n$ racines, ce qui est impossible.

On montre d'une façon analogue que le polynôme

$$\widetilde{T}_n(x) = \frac{T_n(x)}{T_n(x_0)} \quad \text{pour } x_0 \notin [-1, 1]$$

s'écarte le moins du zéro sur $[-1, 1]$ parmi tous les polynômes $q_n(x)$ de degré $n$ vérifiant la condition $q_n(x_0) = 1$.

**3. Relations de récurrence.** *Trois polynômes orthogonaux quelconques de degrés successifs $p_{n-1}(x)$, $p_n(x)$, $p_{n+1}(x)$ sont liés par une formule de récurrence:*

$$xp_n(x) = \alpha_n p_{n+1}(x) + \beta_n p_n(x) + \gamma_n p_{n-1}(x), \tag{7}$$

*où $\alpha_n$, $\beta_n$, $\gamma_n$ sont des constantes.*

Pour la démonstration, nous ferons intervenir le développement

$$xp_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} c_{kn} p_k(x). \tag{8}$$

En vertu de (4) on a

$$c_{kn} = \frac{1}{d_k^2} \int_a^b p_k(x)\, xp_n(x)\, \rho(x)\, dx. \tag{8}$$

Puisque la fonction $xp_k(x)$ est un polynôme de degré $k + 1$, en vertu de la propriété d'orthogonalité du polynôme $p_n(x)$ les coefficients $c_{kn}$ s'annulent pour $(k + 1) < n$. Aussi le développement (8)

peut-il s'écrire sous la forme

$$xp_n = \alpha_n p_{n+1} + \beta_n p_n + \gamma_n p_{n-1},$$

où $\alpha_n = c_{n+1,n}$, $\beta_n = c_{nn}$, $\gamma_n = c_{n-1,n}$, ce qu'il fallait démontrer.

Les coefficients $\alpha_n$, $\beta_n$, $\gamma_n$ se laissent exprimer en fonction du carré de la norme $d_n^2$ et des coefficients $a_n$, $b_n$ affectant les puissances $n$-ième et $n$ — 1-ième du polynôme $p_n(x)$:

$$p_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots \quad (a_n \neq 0).$$

Il ressort de (9) que $d_k^2 c_{kn} = d_n^2 c_{nk}$. Puisque $\alpha_{n-1} = c_{n,\,n-1}$ et $\gamma_n = c_{n-1,\,n}$, on obtient, en posant $k = n - 1$, que

$$\gamma_n = \alpha_{n-1} d_n^2 / d_{n-1}^2. \tag{10}$$

D'autre part, en identifiant les coefficients des termes de plus haut degré dans le premier et le second membres de l'égalité (8), on obtient $a_n = \alpha_n a_{n+1}$ et $b_n = \alpha_n b_{n+1} + \beta_n a_n$, d'où

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}, \quad \beta_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}, \quad \gamma_n = \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{d_n^2}{d_{n-1}^2}. \tag{11}$$

Ainsi donc, connaissant les coefficients $a_n$, $b_n$ et le carré de la norme $d_n^2$ des polynômes orthogonaux quelconques $p_n(x)$, on peut définir par récurrence les polynômes $p_{n+1}$ à partir des polynômes $p_n$ et $p_{n-1}$.

Considérons une relation de récurrence du type (7)

$$zu_n(z) = \alpha_n u_{n+1}(z) + \beta_n u_n(z) + \gamma_n u_{n-1}(z) \tag{7a}$$

pour des valeurs complexes quelconques de $z$. Une des solutions de cette relation est fournie par les polynômes $p_n(z)$, orthogonaux sur l'intervalle $]a, b[$ par rapport au poids $\rho(z)$. Une autre solution, pour $z \notin [a, b]$, est représentée par les fonctions

$$q_n(z) = \int_a^b \frac{p_n(s)\,\rho(s)}{s - z}\, ds.$$

Pour le montrer, il suffit d'intégrer la relation de récurrence pour les polynômes $p_n(s)$ sur l'intervalle $]a, b[$ avec le poids $\frac{\rho(s)}{s-z}$ et d'appliquer l'égalité

$$\int_a^b \frac{s p_n(s)\,\rho(s)}{s - z}\, ds = \int_a^b \left(1 + \frac{z}{s - z}\right) p_n(s)\,\rho(s)\, ds =$$

$$= \int_a^b p_n(s)\,\rho(s)\, ds + z \int_a^b \frac{p_n(s)\,\rho(s)}{s - z}\, ds = zq_n(z) \quad (n \geqslant 1).$$

A la fonction $q_n(z)$ est étroitement liée la fonction

$$r_n(z) = \int_a^b \frac{p_n(s) - p_n(z)}{s - z} \rho(s)\, ds.$$

On voit sans peine que c'est un polynôme de degré $n - 1$. On l'appelle *polynôme de deuxième espèce*. Puisque pour $z \in [a, b]$ on a

$$r_n(z) = \int_a^b \frac{p_n(s)\rho(s)}{s - z} ds - p_n(z) \int_a^b \frac{\rho(s)\, ds}{s - z} = q_n(z) - \frac{1}{a_0} p_n(z)\, q_0(z)$$

et que pour $z \notin [a, b]$ les fonctions $p_n(z)$, $q_n(z)$ vérifient la même relation (7a), on conçoit que les polynômes $r_n(z)$ vérifient cette relation, eux aussi. Or, en vertu de la continuité, ils la vérifient également pour $z \in [a, b]$.

**4. Formule de Darboux-Christoffel.** De la relation de récurrence (7) découle immédiatement une formule importante de la théorie des polynômes orthogonaux, dite *formule de Darboux-Christoffel*:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k(x)\, p_k(y)}{d_k^2} = \frac{1}{d_n^2} \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{p_{n+1}(x)\, p_n(y) - p_n(x)\, p_{n+1}(y)}{x - y}. \qquad (12)$$

Pour sa déduction, nous ferons intervenir la relation (7) et la formule (10):

$$x p_k(x) = \alpha_k p_{k+1}(x) + \beta_k p_k(x) + \alpha_{k-1} \frac{d_k^2}{d_{k-1}^2} p_{k-1}(x),$$

$$y p_k(y) = \alpha_k p_{k+1}(y) + \beta_k p_k(y) + \alpha_{k-1} \frac{d_k^2}{d_{k-1}^2} p_{k-1}(y).$$

Ces relations de récurrence restent vraies aussi pour $k = 0$ si l'on pose $\frac{\alpha_{-1}}{d_{-1}^2} = 0$, $p_{-1}(x) = 0$. Multiplions la première par $p_k(y)$, la seconde par $p_k(x)$, divisons chacune des relations par $d_k^2$ et faisons la soustraction terme à terme. Il vient

$$(x - y) \frac{p_k(x)\, p_k(y)}{d_k^2} = A_k(x, y) - A_{k-1}(x, y),$$

où

$$A_k(x, y) = \frac{\alpha_k}{d_k^2} [p_{k+1}(x)\, p_k(y) - p_k(x)\, p_{k+1}(y)].$$

En faisant la sommation suivant $k$ entre $k = 0$ et $k = n$, on obtient

$$(x - y) \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k(x)\, p_k(y)}{d_k^2} = A_n(x, y).$$

La formule obtenue est de toute évidence équivalente à (12), car $\alpha_n = a_n/a_{n+1}$.

**5. Propriétés des zéros.** Montrons que *tous les zéros $x_j$ du polynôme $p_n(x)$ sont simples et contenus à l'intérieur de l'intervalle* $]a, b[$. Supposons que le polynôme $p_n(x)$ change de signe sur $]a, b[$ en passant par $k$ points. On a évidemment $0 \leqslant k \leqslant n$. Pour que la propriété proposée ait lieu, il faut qu'il y ait $k = n$. Posons

$$q_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k=0, \\ \prod\limits_{j=1}^{k} (x-x_j) & \text{pour } 0<k\leqslant n. \end{cases}$$

Ici $x_j$ sont les points en lesquels le polynôme $p_n(x)$ change de signe. Le produit $p_n(x)\, q_k(x)$ garde évidemment le signe pour $x \in\, ]a, b[$. On a donc

$$\int_a^b p_n(x)\, q_k(x)\, \rho(x)\, dx \neq 0.$$

Il en découle que $k = n$, car pour $k < n$ on a

$$\int_a^b p_n(x)\, q_k(x)\, \rho(x)\, dx = 0$$

en vertu de (5).

On montre que *les zéros des polynômes $p_n(x)$ et $p_{n+1}(x)$ alternent.* Considérons un cas particulier de la formule de Darboux-Christoffel qui se réalise quand on fait un passage à la limite dans (12) pour $y \to x$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k^2(x)}{d_k^2} = \frac{1}{d_n^2} \frac{a_n}{a_{n+1}} [p'_{n+1}(x)\, p_n(x) - p'_n(x)\, p_{n+1}(x)]. \qquad (13)$$

Soient $x_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n+1$) les zéros du polynôme $p_{n+1}(x)$. Conformément à (13), le signe que prend le produit $p'_{n+1}(x)\, p_n(x)$ dans les zéros $x_j$ du polynôme $p_{n+1}(x)$ est indépendant de $j$. Or, le premier facteur $p'_{n+1}(x)$ change de signe en passant de $x_j$ à $x_{j+1}$; le second facteur doit donc en faire autant. Par conséquent, $p_n(x)$ s'annule dans au moins un point de l'intervalle $]x_j, x_{j+1}[$. Puisque nous avons $n$ intervalles $]x_j, x_{j+1}[$ dont chacun contient au moins un des $n$ zéros du polynôme $p_n(x)$, il est évident que deux zéros successifs quelconques du polynôme $p_{n+1}(x)$ encadrent exactement un zéro du polynôme $p_n(x)$.

**6. Propriétés de parité des polynômes consécutives à la parité de la fonction poids.** Soient $\{p_n(x)\}$ des polynômes orthogonaux sur l'intervalle $]-a, a[$ par rapport à un poids $\rho(x)$ qui est une fonction

paire. Alors, changeant dans (3) $x$ en $-x$, on obtient

$$\int_{-a}^{a} p_n(-x)\, p_m(-x)\, \rho(x)\, dx = 0 \quad (m \neq n).$$

Puisque la donnée du poids $\rho(x)$ définit les polynômes orthogonaux de façon univoque à un facteur de normalisation près, on a $p_n(-x) = C_n p_n(x)$. Identifiant les coefficients des termes de plus haut degré, on obtient $C_n = (-1)^n$, ce qui donne lieu, en particulier, aux propriétés de parité suivantes des polynômes d'Hermite et de Legendre :

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x),$$
$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x).$$

La dernière égalité est un cas particulier de l'égalité

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta, \alpha)}(x)$$

qui découle de la formule de Rodrigues pour les polynômes de Jacobi.

Nous venons de montrer que les polynômes $\{p_n(x)\}$ orthogonaux sur l'intervalle $]-a, a[$ par rapport au poids $\rho(x)$, qui est une fonction paire, vérifient la relation

$$p_n(-x) = (-1)^n p_n(x).$$

En identifiant les coefficients qui affectent les mêmes puissances de $x$ dans cette égalité, on remarque que pour $n$ impair les polynômes $p_n(x)$ ne contiennent que des puissances impaires de $x$, et pour $n$ pair, ils ne contiennent que des puissances paires de $x$, i.e.

$$p_{2n}(x) = s_n(x^2), \qquad p_{2n+1}(x) = x t_n(x^2),$$

$s_n(x)$, $t_n(x)$ étant des polynômes de degré $n$ en $x$. En faisant intervenir les conditions d'orthogonalité pour les polynômes de degré pair $\{p_{2n}(x)\}$, on a pour $m \neq n$

$$\int_{-a}^{a} p_{2n}(x)\, p_{2m}(x)\, \rho(x)\, dx = \int_{-a}^{a} s_n(x^2)\, s_m(x^2)\, \rho(x)\, dx =$$
$$= 2\int_{0}^{a} s_n(x^2)\, s_m(x^2)\, \rho(x)\, dx = \int_{0}^{a^2} s_n(\xi)\, s_m(\xi) \frac{\rho(\sqrt{\xi})}{\sqrt{\xi}}\, d\xi = 0.$$

Ainsi donc, *les polynômes* $s_n(x) = p_{2n}(\sqrt{x})$ *sont orthogonaux sur l'intervalle* $]0, a^2[$ *par rapport au poids* $\rho_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\, \rho(\sqrt{x})$.

D'une façon parfaitement analogue, on a

$$\int_{-a}^{a} p_{2n+1}(x)\, p_{2m+1}(x)\, \rho(x)\, dx = \int_{-a}^{a} x^2 t_n(x^2)\, t_m(x^2)\, \rho(x)\, dx =$$

$$= \int_{0}^{a^2} t_n(\xi)\, t_m(\xi) \sqrt{\xi}\, \rho(\sqrt{\xi})\, d\xi = 0 \quad (m \neq n).$$

Ainsi donc, *les polynômes* $t_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} p_{2n+1}(\sqrt{x})$ *sont orthogonaux sur l'intervalle* $]0, a^2[$ *par rapport au poids* $\rho_2(x) = \sqrt{x}\, \rho(\sqrt{x})$. Il en découle en particulier que

$$H_{2n}(x) = C_n L_n^{-1/2}(x^2), \quad H_{2n+1}(x) = A_n x L_n^{1/2}(x^2).$$

On recherche les constantes $C_n$, $A_n$ en identifiant dans ces relations les coefficients qui affectent les termes de plus haut degré (voir § 7). Il vient

$$H_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} n!\, L_n^{-1/2}(x^2), \tag{14}$$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n 2^{2n+1} n!\, x L_n^{1/2}(x^2). \tag{15}$$

**7. Relation entre deux systèmes de polynômes orthogonaux dont le rapport des poids est une fonction rationnelle.** Lorsque $n$ est élevé, le calcul des polynômes orthogonaux $p_n(x)$ à l'aide des moments $C_k$ d'après la formule (6) devient assez encombrant. Il est beaucoup plus facile de les calculer par la relation de récurrence (7), dans le cas où les coefficients de celle-ci sont connus. Le calcul de ces coefficients cesse d'être une affaire facile en dehors d'une classe restreinte de polynômes orthogonaux. On comprend donc l'intérêt pratique des formules simples qui établissent des relations entre deux systèmes de polynômes orthogonaux par rapport à des poids différents. De telles formules existent par exemple dans le cas où le rapport des poids est une fonction rationnelle *).

Soient $\{p_n(x)\}$, $\{\bar{p}_n(x)\}$ deux systèmes de polynômes orthogonaux sur l'intervalle $]a, b[$ par rapport aux poids $\rho(x)$ et $\bar{\rho}(x)$ respectivement, avec $\bar{\rho}(x) = R(x)\, \rho(x)$, où $R(x)$ est une fonction ra-

*) Voir В. Б. Уваров, *О связи систем полиномов, ортогональных относительно различных функций распределения*. Журнал вычислительной математики и математической физики, т. 9, № 6, 1969 (V. Ouvarov, *Sur la relation entre des systèmes de polynômes orthogonaux par rapport aux différentes fonctions de distribution*).

tionnelle:

$$R(x)=\frac{\prod_{j=1}^{k}(x-\alpha_j)}{\prod_{j=1}^{l}(x-\beta_j)}.$$

Cherchons la relation entre $\bar{p}_n(x)$ et $p_n(x)$ d'abord pour le cas où $k=1$, $l=0$, i.e. $\bar{\rho}(x)=(x-\alpha_1)\rho(x)$. Développons le polynôme $\bar{p}_n(x)$ suivant les polynômes $p_m(x)$:

$$\bar{p}_n(x)=\sum_{m=0}^{n}C_m p_m(x).$$

Ici

$$C_m=\frac{1}{d_m^2}\int_a^b \bar{p}_n(x)\,p_m(x)\,\rho(x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{d_m^2}\left[\int_a^b \bar{p}_n(x)\frac{p_m(x)-p_m(\alpha_1)}{x-\alpha_1}\bar{\rho}(x)\,dx+p_m(\alpha_1)\int_a^b \bar{p}_n(x)\,\rho(x)\,dx\right].$$

Puisque la fonction $\frac{p_m(x)-p_m(\alpha_1)}{x-\alpha_1}$ est un polynôme de degré $m-1$ et que $m-1<n$, la première intégrale s'annule en vertu de l'orthogonalité des polynômes $\bar{p}_n(x)$, d'où

$$C_m=A_n\frac{p_m(\alpha_1)}{d_m^2},$$

où $A_n$ est une constante.

On a donc

$$\bar{p}_n(x)=A_n\sum_{m=0}^{n}\frac{p_m(\alpha_1)\,p_m(x)}{d_m^2}.$$

En faisant intervenir la formule de Darboux-Christoffel, on obtient l'expression suivante:

$$\bar{p}_n(x)=D_n\frac{p_{n+1}(x)\,p_n(\alpha_1)-p_{n+1}(\alpha_1)\,p_n(x)}{x-\alpha_1}, \qquad (16)$$

où $D_n$ est une constante.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où $k=0$, $l=1$, i.e. $\bar{\rho}(x)=\frac{\rho(x)}{x-\beta_1}$. Faisons de nouveau le développement du polynôme $\bar{p}_n(x)$ suivant les polynômes $p_m(x)$:

$$\bar{p}_n(x)=\sum_{m=0}^{n}C_m p_m(x),$$

où

$$C_m = \frac{1}{d_m^2} \int_a^b \bar{p}_n(x)\, p_m(x)\, \rho(x)\, dx = \frac{1}{d_m^2} \int_a^b \bar{p}_n(x)\,(x-\beta_1)\, p_m(x)\, \bar{\rho}(x)\, dx.$$

Puisque la fonction $(x - \beta_1)\, p_m(x)$ est un polynôme de degré $m + 1$, les coefficients $C_m$ s'annulent pour $m < n - 1$ en vertu de l'orthogonalité des polynômes $\bar{p}_n(x)$, i.e.

$$\bar{p}_n(x) = C_{n-1} p_{n-1}(x) + C_n p_n(x).$$

Pour connaître les coefficients $C_{n-1}$ et $C_n$, intégrons cette relation sur l'intervalle $]a, b[$ avec le poids $\bar{\rho}(x) = \frac{\rho(x)}{x-\beta_1}$. Pour $n \geqslant 1$ l'intégrale du premier membre de la relation s'annule, i.e.

$$C_{n-1} q_{n-1}(\beta_1) + C_n\, q_n(\beta_1) = 0,$$

où

$$q_m(z) = \int_a^b \frac{p_m(x)\, \rho(x)}{x - z}\, dx.$$

D'où

$$C_n = D_n q_{n-1}(\beta_1), \quad C_{n-1} = -D_n q_n(\beta_1)$$

($D_n$ est une constante).

Ainsi donc, pour $\bar{\rho}(x) = \frac{\rho(x)}{x-\beta_1}$ on a

$$\bar{p}_n(x) = D_n\,[p_n(x)\, q_{n-1}(\beta_1) - p_{n-1}(x)\, q_n(\beta_1)]. \tag{17}$$

Revenons à présent au cas général où l'on a

$$\bar{\rho}(x) = \frac{\prod_{j=1}^{k}(x-\alpha_j)}{\prod_{j=1}^{l}(x-\beta_j)}\, \rho(x).$$

A l'aide des formules du type (16) et (17), on obtient par récurrence, en augmentant $k$ ou $l$ d'une unité,

$$\bar{p}_n(x) = \frac{D_n}{\prod_{j=1}^{k}(x-\alpha_j)} \begin{vmatrix} q_{n-l}(\beta_1) & \ldots & q_{n+k}(\beta_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{n-l}(\beta_l) & \ldots & q_{n+k}(\beta_l) \\ p_{n-l}(\alpha_1) & \ldots & p_{n+k}(\alpha_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n-l}(\alpha_k) & \ldots & p_{n+k}(\alpha_k) \\ p_{n-l}(x) & \ldots & p_{n+k}(x) \end{vmatrix},$$

où $D_n$ est une constante de normalisation.

Rappelons que les fonctions $q_m(z)$ et les polynômes $p_m(z)$ vérifient la même relation de récurrence (voir n° 3).

## § 7. Caractéristiques principales des polynômes orthogonaux classiques

**1. Calcul du carré de la norme et des coefficients des termes de plus haut degré.** Calculons les coefficients $a_n$, $b_n$ dans le développement du polynôme

$$y_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots,$$

ainsi que le carré de la norme

$$d_n^2 = \int_a^b y_n^2(x)\,\rho(x)\,dx.$$

Le coefficient $a_n$ se laisse exprimer en fonction de la constante de normalisation $B_n$ de la formule de Rodrigues à l'aide des formules (4) et (5) du § 5. Puisque $y_n^{(n)}(x) = a_n n!$, on a

$$a_n = \frac{A_{nn}B_n}{n!} = B_n \prod_{k=0}^{n-1}\left(\tau' + \frac{n+k-1}{2}\sigma''\right), \quad a_0 = B_0. \tag{1}$$

Le coefficient $b_n$ se calcule sans peine en identifiant les coefficients de $x^{n-1}$ dans l'équation différentielle pour $y_n(x)$:

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{n\tau_{n-1}(0)}{\tau'_{n-1}(0)}. \tag{2}$$

Quant à $d_n^2$, on se servira utilement de la formule de Rodrigues. On a

$$d_n^2 = \int_a^b y_n^2(x)\,\rho(x)\,dx = B_n \int_a^b y_n(x)\,[\sigma^n(x)\,\rho(x)]^{n}\,dx.$$

En faisant $n$ fois l'intégration par parties, on obtient finalement

$$d_n^2 = (-1)^n\, n!\, a_n B_n \int_a^b \sigma^n(x)\,\rho(x)\,dx. \tag{3}$$

Nous avons profité du fait que les termes $y_n^{(m-1)}(x)\,[\sigma^n(x)\,\rho(x)]^{(n-m)}\big|_a^b$ ($m = 1, 2, \ldots, n$) s'annulent en vertu de la condition (8) du § 5, car on a d'après la formule (4) du § 5

$$[\sigma^n(x)\,\rho(x)]^{(n-m)} = \frac{1}{A_{mn}B_n}\,\sigma^m(x)\,\rho(x)\,y_n^{(m)}(x).$$

L'intégrale dans (3) peut être exprimée en utilisant la fonction gamma (voir Appendice A, n° 5).

Les caractéristiques principales des polynômes orthogonaux classiques sont résumées dans le tableau 2.

*Tableau 2*

**Caractéristiques principales des polynômes orthogonaux classiques**

| $y_n(x)$ | $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ $(\alpha>-1,\ \beta>-1)$ | $L_n^{\alpha}(x)$ $(\alpha>-1)$ | $H_n(x)$ |
|---|---|---|---|
| $]a, b[$ | $]-1, 1[$ | $]0, \infty[$ | $]-\infty, \infty[$ |
| $\rho(x)$ | $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ | $x^{\alpha}e^{-x}$ | $e^{-x^2}$ |
| $\sigma(x)$ | $1-x^2$ | $x$ | $1$ |
| $\tau(x)$ | $\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x$ | $1+\alpha-x$ | $-2x$ |
| $\lambda_n$ | $n(n+\alpha+\beta+1)$ | $n$ | $2n$ |
| $B_n$ | $\frac{(-1)^n}{2^n n!}$ | $\frac{1}{n!}$ | $(-1)^n$ |
| $a_n$ | $\frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{2^n n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$ | $\frac{(-1)^n}{n!}$ | $2^n$ |
| $b_n$ | $\frac{(\alpha-\beta)\Gamma(2n+\alpha+\beta)}{2^n(n-1)!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$ | $(-1)^{n-1}\frac{n+\alpha}{(n-1)!}$ | $0$ |
| $d_n^2$ | $\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$ | $\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$ | $2^n n!\sqrt{\pi}$ |
| $\alpha_n$ | $\frac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}$ | $-(n+1)$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\beta_n$ | $\frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}$ | $2n+\alpha+1$ | $0$ |
| $\gamma_n$ | $\frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}$ | $-(n+\alpha)$ | $n$ |
| $\tilde{\alpha}_n$ | $-n$ | $0$ | $0$ |
| $\tilde{\beta}_n$ | $\frac{(\alpha-\beta)n}{(2n+\alpha+\beta)}$ | $n$ | $0$ |
| $\tilde{\gamma}_n$ | $\frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{2x+\alpha+\beta}$ | $-(n+\alpha)$ | $2n$ |

Les constantes $\alpha_n$, $\beta_n$, $\gamma_n$ qu'on voit dans le tableau 2 interviennent comme coefficients dans la relation de récurrence (voir § 6, n° 3)

$$xy_n(x) = \alpha_n y_{n+1}(x) + \beta_n y_n(x) + \gamma_n y_{n-1}(x).$$

Les coefficients $\tilde{\alpha}_n$, $\tilde{\beta}_n$, $\tilde{\gamma}_n$ figurent dans la formule de dérivation

$$\sigma(x)\, y_n'(x) = (\tilde{\alpha}_n x + \tilde{\beta}_n)\, y_n(x) + \tilde{\gamma}_n\, y_{n-1}(x)$$

qu'on obtient en portant dans la formule (7) du § 5 l'expression de $y_{n+1}(x)$ tirée de la relation de récurrence citée.

**2. Valeurs particulières.** La formule de Rodrigues permet de calculer les valeurs numériques des polynômes de Jacobi et de Laguerre pour certaines valeurs de $x$ en appliquant la règle de Leibniz pour le calcul des dérivées d'un produit de deux fonctions:

$$P_n^{(\alpha,\,\beta)}(1) = L_n^{\alpha}(0) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)}, \tag{4}$$

$$P_n^{(\alpha,\,\beta)}(-1) = (-1)^n \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,\Gamma(\beta+1)}. \tag{5}$$

On tire pour les polynômes de Legendre:

$$P_n(1) = 1, \qquad P_n(-1) = (-1)^n. \tag{6}$$

Les formules (14) et (15) du § 6 fournissent les valeurs des polynômes d'Hermite pour $x = 0$:

$$H_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{n!}, \qquad H_{2n+1}(0) = 0. \tag{7}$$

**3. Allure générale et évaluation de certaines valeurs numériques des polynômes de Jacobi, de Laguerre et d'Hermite.** Pour connaître l'allure générale des solutions d'une équation différentielle du type

$$[k(x)\, y']' + r(x)\, y = 0$$

sur un intervalle où $k(x) > 0$ et $r(x) > 0$, on remplacera utilement la fonction oscillante $y(x)$ par la fonction

$$v(x) = y^2(x) + a(x)\,[k(x)\, y'(x)]^2$$

en choisissant le facteur $a(x)$ de telle façon que les domaines dans lesquels la fonction $v(x)$ est monotone soient connus. A cet effet, calculons la dérivée $v'(x)$ en utilisant l'équation différentielle pour la fonction $y(x)$:

$$v'(x) = 2yy' + a'(x)\,[k(x)\, y']^2 + 2a(x)\, k(x)\, y'\,[k(x)\, y']' =$$
$$= a'(x)\,[k(x)\, y']^2 + 2yy'\,[1 - a(x)\, k(x)\, r(x)].$$

Le choix $a(x) = 1/(k(x)\, r(x))$ nous donne

$$v'(x) = \left[\frac{1}{k(x)\, r(x)}\right]' [k(x)\, y']^2.$$

Puisque $[k(x)\, y']^2 \geqslant 0$, les domaines de croissance et de décroissance monotone de $v(x)$ se confondent avec ceux de $a(x) = 1/(k(x)\, r(x))$. Remarquons que les fonctions $v(x)$ et $y^2(x)$ prennent des valeurs

égales dans les points où la fonction $y^2(x)$ passe par un maximum. Cela permet de cerner les domaines où les maximums successifs de $|y(x)|$ croissent ou décroissent.

Appliquons le même raisonnement pour déterminer l'allure des polynômes orthogonaux classiques sur un intervalle d'orthogonalité $]a, b[$ où $\sigma(x) \geqslant 0$. Dans ce cas les polynômes $y = y_n(x)$ vérifient l'équation différentielle

$$[k(x) y']' + r(x) y = 0$$

pour $k(x) = \sigma(x) \rho(x)$, $r(x) = \lambda\rho(x)$, $\lambda = \lambda_n$ $(n \neq 0)$. Posons donc

$$v(x) = y^2(x) + \frac{\sigma(x)}{\lambda} [y'(x)]^2. \tag{8}$$

A l'aide de l'équation différentielle pour le polynôme $y(x)$, nous obtenons

$$v'(x) = \frac{\sigma'(x) - 2\tau(x)}{\lambda} [y'(x)]^2. \tag{9}$$

Cette expression montre que la fonction $v'(x)$ est de même signe que le polynôme du premier degré $\frac{1}{\lambda}[\sigma'(x) - 2\tau(x)]$. Les fonctions $v(x)$ et $y^2(x)$ prennent les mêmes valeurs dans les points où $\sigma(x) = 0$, ainsi que dans les points de maximum de la fonction $y^2(x)$ où $y'(x) = 0$. Pour cette raison les valeurs de la fonction $|y(x)|$ dans les points indiqués décroîtront successivement dans le domaine de $v'(x) < 0$ et croîtront dans le domaine de $v'(x) > 0$.

*Exemple 1.* Pour les *polynômes de Jacobi* on a $\sigma(x) = 0$ pour $x = \pm 1$, $\sigma'(x) - 2\tau(x) = 2[\alpha - \beta + (\alpha + \beta + 1)x]$. Soient $\alpha + 1/2 > 0$ et $\beta + 1/2 > 0$; on a alors $\lambda_n \geqslant 1$. Pour $-1 < x < \tilde{x} = \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta + 1}$ on a $\sigma'(x) - 2\tau(x) < 0$ et $|P_n^{(\alpha, \beta)}(x)| < |P_n^{(\alpha, \beta)}(-1)|$, et les valeurs des maximums de la fonction $|P_n^{(\alpha, \beta)}(x)|$ décroissent avec la croissance de $x$. De même, pour $\tilde{x} < x < 1$ les valeurs des maximums successifs de la fonction $|P_n^{(\alpha, \beta)}(x)|$ vont en croissant.

Ainsi donc, pour $\alpha + 1/2 > 0$, $\beta + 1/2 > 0$ et $-1 < x < 1$, on a

$$|P_n^{(\alpha, \beta)}(x)| < \max[|P_n^{(\alpha, \beta)}(-1)|, |P_n^{(\alpha, \beta)}(1)|].$$

En particulier, pour les polynômes de Legendre on a $|P_n(x)| < 1$ pour $-1 < x < 1$ (voir fig. 1).

*Exemple 2.* Pour les *polynômes de Laguerre*, quand $\alpha + 1/2 > 0$ et $0 < x < \tilde{x} = \alpha + 1/2$, on a $|L_n^\alpha(x)| < |L_n^\alpha(0)|$; les valeurs des maximums successifs de $|L_n^\alpha(x)|$ décroissent. Par contre, si $x > \tilde{x}$, les valeurs des maximums successifs de la fonction $|L_n^\alpha(x)|$ croissent (voir fig. 2 pour $L_n^\alpha(x)$ avec $\alpha = 0$).

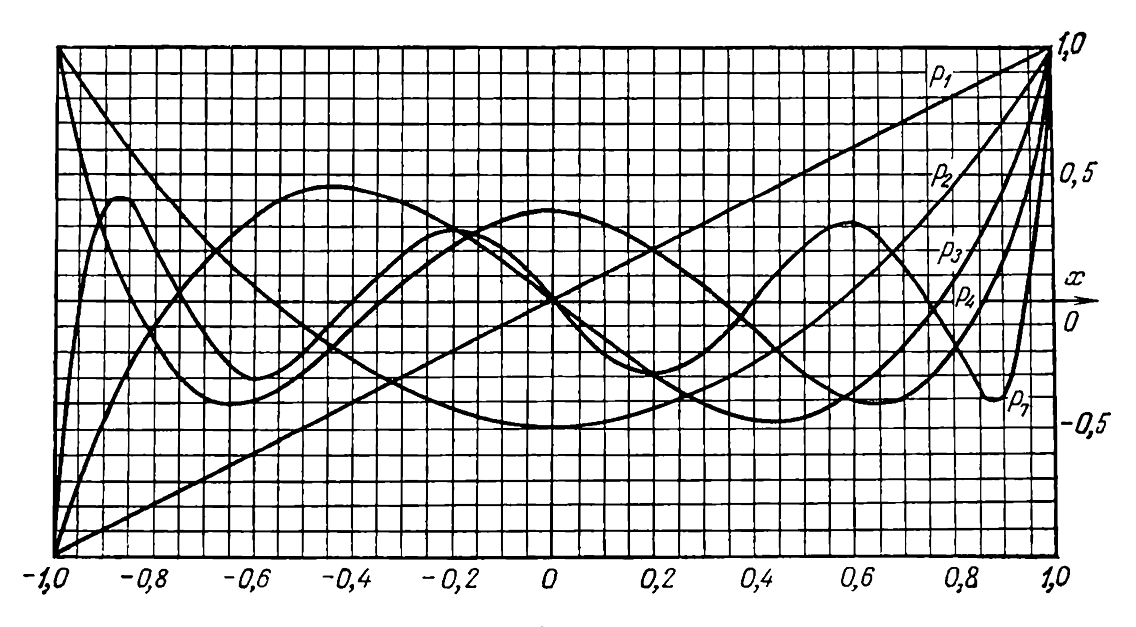

1,0
0,5
0
-0,5
x
$P_1$
$P_2$
$P_3$
$P_4$
$P_7$
-1,0 -0,8 -0,6 -0,4 -0,2 0 0,2 0,4 0,6 0,8 1,0

Fig. 1

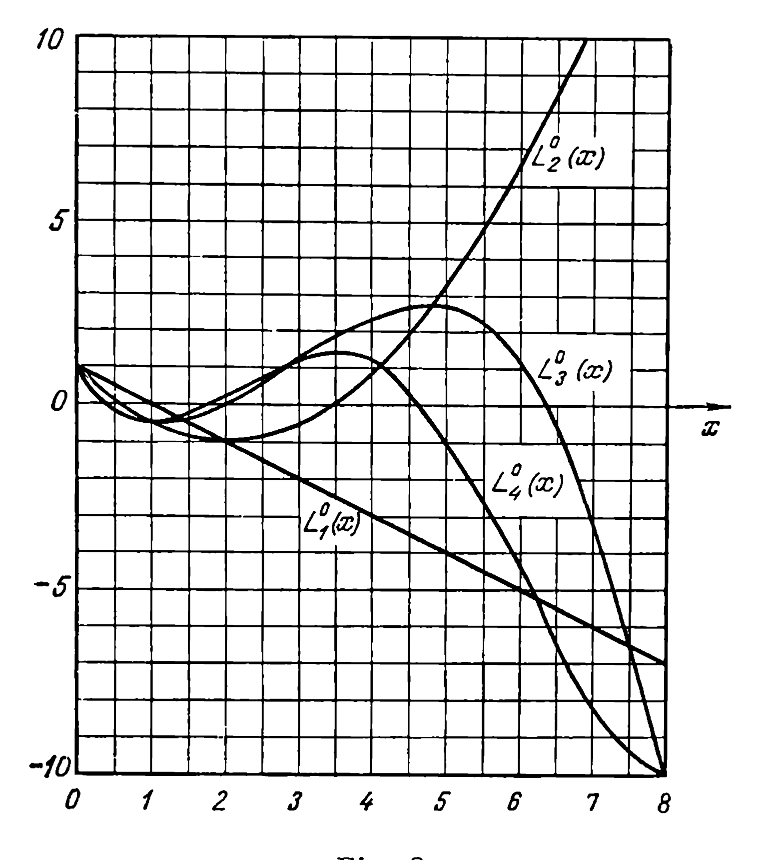

10
5
0
-5
-10
x
$L_2^0(x)$
$L_3^0(x)$
$L_4^0(x)$
$L_1^0(x)$
0 1 2 3 4 5 6 7 8

Fig. 2

*Exemple 3.* Pour les *polynômes d'Hermite* on a $\sigma'(x) - 2\tau(x) = 4x$. Aussi les valeurs des maximums successifs de $|H_n(x)|$ croissent-elles avec la croissance de $|x|$.

Ces évaluations donnent l'idée générale du comportement des polynômes $y = y_n(x)$ sur leur intervalle d'orthogonalité. Nous entreprendrons maintenant quelques évaluations numériques simples pour les polynômes de Jacobi et de Laguerre, afin d'en connaître d'une façon plus précise la variation en fonction de $n$ dans les points internes de l'intervalle $]a, b[$, supposant comme précédemment que $\tilde{x} \in ]a, b[$. Pour les polynômes d'Hermite, les évaluations correspondantes s'obtiennent grâce à la relation entre les polynômes d'Hermite et ceux de Laguerre.

Prenons l'équation généralisée du type hypergéométrique

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(x)}{\sigma(x)} u' + \frac{\tilde{\sigma}(x)}{\sigma^2(x)} u = 0 \tag{10}$$

et, opérant la transformation $u = \varphi(x) y$ introduite dans le § 1, réduisons-la à l'équation pour les polynômes orthogonaux classiques:

$$\sigma(x) y'' + \tau(x) y' + \lambda y = 0. \tag{11}$$

Rappelons la relation entre les coefficients de (10) et de (11):

$$\tilde{\tau}(x) = \tau(x) - 2\pi(x), \quad \tilde{\sigma}(x) = \lambda\sigma(x) - q(x),$$

$$q(x) = \pi^2(x) + \pi(x)[\tilde{\tau}(x) - \sigma'(x)] + \pi'(x)\sigma(x).$$

Ici $\pi(x)$ est un polynôme de degré non supérieur à 1 qui figure dans l'équation différentielle

$$\varphi'(x)/\varphi(x) = \pi(x)/\sigma(x)$$

pour la fonction $\varphi(x)$. Mettons l'équation (10) sous une forme différente:

$$\sigma(x) u'' + \tilde{\tau}(x) u' + \left[\lambda - \frac{q(x)}{\sigma(x)}\right] u = 0. \tag{12}$$

La manière la plus simple d'évaluer $u(x)$ consiste à introduire une fonction analogue à $v(x)$:

$$w(x) = u^2(x) + \frac{\sigma(x)}{\lambda} [u'(x)]^2.$$

Il est évident que l'on a sur l'intervalle $]a, b[$ pour les polynômes de Jacobi et de Laguerre

$$|u(x)| \leqslant \sqrt{w(x)}. \tag{13}$$

A l'aide de l'équation différentielle (12) on obtient

$$w'(x) = \frac{\sigma'(x) - 2\tilde{\tau}(x)}{\lambda}[u'(x)]^2 + \frac{2q(x)}{\lambda\sigma(x)}u(x)u'(x).$$

L'expression de $w'(x)$ revêt une forme particulièrement simple si l'on choisit le polynôme $\pi(x)$ à partir de la condition $\sigma'(x) - 2\tilde{\tau}(x) = 0$. On a

$$\pi(x) = \frac{1}{4}[2\tau(x) - \sigma'(x)].$$

Il vient alors

$$w'(x) = \frac{2q(x)}{\lambda\sigma(x)}u(x)u'(x). \qquad (14)$$

De l'inégalité évidente $2ab \leqslant a^2 + b^2$ (pour $a$, $b$ quelconques) il ressort que

$$2\sqrt{\frac{\sigma(x)}{\lambda}}uu' \leqslant u^2 + \frac{\sigma(x)}{\lambda}[u'(x)]^2 = w(x).$$

Il vient donc, en vertu de (14),

$$w'(x) \leqslant \frac{|q(x)|}{\sqrt{\lambda}\,\sigma^{3/2}(x)}w(x).$$

D'où, pour $x \geqslant x_0$, on obtient

$$w(x) = w(x_0)\exp\left[\int_{x_0}^{x}\frac{w'(s)}{w(s)}ds\right] \leqslant w(x_0)\exp\left[\int_{x_0}^{x}\frac{|q(s)|}{\sqrt{\lambda}\,\sigma^{3/2}(s)}ds\right] \qquad (15)$$

pour en tirer, en vertu de (13), l'évaluation

$$|u(x)| \leqslant \sqrt{w(x_0)}\exp\left[\int_{x_0}^{x}\frac{|q(s)|}{2\sqrt{\lambda}\,\sigma^{3/2}(s)}ds\right]. \qquad (16)$$

Appliquons l'évaluation (16) dans le cas des polynômes de Jacobi. Par raison de symétrie

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x),$$

il suffit d'évaluer $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ pour $-1 < x \leqslant 0$. On a dans ce cas

$$\sigma(x) = 1 - x^2 \geqslant 1 + x,$$

d'où

$$\frac{|q(x)|}{2\sqrt{\lambda}\,\sigma^{3/2}(x)} \leqslant \frac{A_1}{2\sqrt{\lambda}(1+x)^{3/2}},$$

où $A_1 = \max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 0} |q(x)|$. On a donc pour $-1 < x_0 \leqslant x \leqslant 0$

$$|u(x)| \leqslant \sqrt{w(x_0)} \exp\left[\frac{A}{\sqrt{\lambda(1+x_0)}}\right]$$

en vertu de (16).

L'évaluation obtenue montre qu'on ne peut pas choisir $x_0 = -1$. Choisissons donc $x_0$ à partir de la condition $\sqrt{\lambda(1+x_0)} = C$, où $C$ est une constante indépendante de $n$ (puisque $\lambda = \lambda_n$ dépend de $n$, $x_0$ en dépend elle aussi). On aura alors

$$|u(x)| \leqslant A_2 \sqrt{w(x_0)} \tag{17}$$

($A_2$ est une constante qui ne dépend pas de $n$).

Pour évaluer $w(x_0)$, cherchons la relation de la fonction $w(x)$ avec le polynôme de Jacobi $y(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. On a $u(x) = \varphi(x)\, y(x)$, où $\varphi(x)$ est solution de l'équation différentielle

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\pi(x)}{\sigma(x)}, \quad \pi(x) = \frac{1}{4}[2\tau(x) - \sigma'(x)].$$

Puisque

$$\frac{\pi(x)}{\sigma(x)} = \frac{1}{2}\frac{\tau(x)}{\sigma(x)} - \frac{1}{4}\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} = \frac{1}{2}\frac{(\sigma\rho)'}{\sigma\rho} - \frac{1}{4}\frac{\sigma'}{\sigma},$$

on a

$$\varphi(x) = [\sigma(x)\rho^2(x)]^{1/4}, \quad u(x) = [\sigma(x)\rho^2(x)]^{1/4}\, y(x),$$

d'où

$$w(x) = u^2(x) + \frac{\sigma(x)}{\lambda}[u'(x)]^2 =$$

$$= \sqrt{\sigma(x)\rho^2(x)}\left[y^2(x) + \left(\frac{2\tau(x) - \sigma'(x)}{4\sqrt{\lambda\sigma(x)}}\, y + \sqrt{\frac{\sigma(x)}{\lambda}}\, y'\right)^2\right]. \tag{18}$$

Pour évaluer $w(x)$, nous ferons intervenir les inégalités

$$v(x) \leqslant v(-1) = y^2(-1),$$

$$0 \leqslant 2\tau(x) - \sigma'(x) < 2\tau(-1) - \sigma'(-1)$$

démontrées précédemment pour $-1 < x < \tilde{x} = \dfrac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta+1}$, ainsi que les évaluations évidentes (voir formule (8))

$$|y(x)| \leqslant \sqrt{v(x)}, \quad \sqrt{\sigma(x)/\lambda}\, |y'(x)| \leqslant \sqrt{v(x)}.$$

Conformément à ces évaluations, la formule (18) nous donne pour $x_0 < \tilde{x}$

$$w(x_0) \leqslant A_3 \sqrt{\sigma(x_0)\rho^2(x_0)}\, y^2(-1),$$

où

$$A_3 = 1 + \left(\frac{2\tau(-1) - \sigma'(-1)}{4C} + 1\right)^2.$$

La condition $x_0 < \tilde{x}$ sera automatiquement vérifiée pour $n \geqslant 1$ si l'on pose $C < \sqrt{1+\tilde{x}}$, car $\lambda = \lambda_n \geqslant 1$ pour $n \geqslant 1$. Compte tenu de la relation

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z)\, z^a} = 1, \quad |\arg z| \leqslant \pi - \delta$$

(voir Appendice A, formule (26)), de la formule (5) et de l'égalité $\sqrt{\lambda(1+x_0)} = C$ définissant la valeur de $x_0$, on voit sans peine que la quantité $\sqrt{n}\,[\sigma(x_0)\,\rho^2(x_0)]^{1/4}\,|\,y(-1)\,|$ est uniformément bornée par rapport à $n$. Donc, dans le cas de $\alpha + 1/2 > 0$, $\beta + 1/2 > 0$, l'évaluation de $w(x_0)$ et la formule (17) donnent lieu à l'évaluation suivante pour les polynômes de Jacobi:

$$(1-x)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}(1+x)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}\,|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)| \leqslant \frac{A}{\sqrt{n}}, \qquad (19)$$

où $A$ est une constante qui ne dépend pas de $n$.

Etablie pour $x \geqslant x_0$, l'inégalité (19) reste vraie aussi pour $x < x_0$, car on a dans ce cas

$$[\sigma(x)\,\rho^2(x)]^{1/4}\,|\,y(x)\,| \leqslant [\sigma(x_0)\,\rho^2(x_0)]^{1/4}\,|\,y(-1)\,|,$$

tandis que la quantité $\sqrt{n}\,[(\sigma(x_0)\,\rho^2(x_0)]^{1/4}\,|\,y(-1)\,|$ est uniformément bornée par rapport à $n$. Ceci nous prouve que (19) est vraie pour $-1 \leqslant x \leqslant 0$. Enfin, la relation

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x)$$

permet de voir que l'inégalité (19) est satisfaite aussi pour $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Puisque nous avons pour les polynômes de Jacobi

$$d_n^2 = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,(2n+\alpha+\beta+1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)},$$

la relation

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z)\, z^a} = 1, \quad |\arg z| \leqslant \pi - \delta$$

(voir Appendice A, formule (26)) nous montre que la quantité $nd_n^2$ est bornée. Aussi l'évaluation (19) pour les polynômes de Jacobi se laisse-t-elle récrire sous la forme

$$(1-x)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}(1+x)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}\,\frac{|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)|}{d_n} \leqslant C_1, \qquad (20)$$

où $C_1$ est une constante qui ne dépend pas de $n$.

Par la même méthode que pour les polynômes de Jacobi, en faisant intervenir l'inégalité (15) et en posant $\sqrt{\lambda x_0} = C$, on obtient une évaluation pour les polynômes de Laguerre $L_n^{\alpha}(x)$ dans le cas de $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\alpha + 1/2 > 0$:

$$\sqrt{\frac{w(x)}{d_n^2}} \leqslant \frac{C_2}{n^{1/4}}, \tag{21}$$

$$x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} e^{-\frac{x}{2}} \frac{|L_n^{\alpha}(x)|}{d_n} \leqslant \sqrt{\frac{w(x)}{d_n^2}} \leqslant \frac{C_2}{n^{1/4}}, \tag{22}$$

où $C_2$ est une constante indépendante de $n$.

Lorsque $x \to \infty$, l'évaluation fournie par la relation (15) pour les polynômes de Laguerre s'avère excessivement grossière, vu que son second membre croît exponentiellement pour $x \to +\infty$, tandis que son premier membre décroît exponentiellement. Pour améliorer cette évaluation, on peut utiliser l'égalité (14). En effet, puisque

$$\sqrt{\frac{\sigma(x)}{\lambda}}\,|u'(x)| \leqslant \sqrt{w(x)},$$

on a

$$w'(x) \leqslant \frac{2|q(x)|}{\sqrt{\lambda}\,\sigma^{3/2}}\,|u(x)|\sqrt{w(x)},$$

i. e.

$$\frac{d}{dz}\sqrt{w(x)} \leqslant \frac{|q(x)\,u(x)|}{\sqrt{\lambda}\,\sigma^{3/2}(x)} = \frac{|q(x)|\sqrt{\rho(x)}\,|y(x)|}{\sqrt{\lambda}\,\sigma^{5/4}(x)}. \tag{23}$$

D'où, pour $x > 1$, on obtient

$$\sqrt{w(x)} = \sqrt{w(1)} + \int_1^x \frac{d}{ds}\left[\sqrt{w(s)}\right] ds \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{w(1)} + \int_1^x \frac{|q(s)\sqrt{\rho(s)}\,|y(s)|}{\sqrt{\lambda}\,\sigma^{5/4}(s)}\, ds.$$

Appliquons l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski. Il vient

$$\sqrt{w(x)} \leqslant \sqrt{w(1)} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\int_1^x \frac{q^2(s)\,ds}{\sigma^{5/2}(s)} \int_0^{\infty} y^2(s)\,\rho(s)\,ds},$$

d'où

$$[\sigma(x)\,\rho^2(x)]^{1/4}\,\frac{|y(x)|}{d_n} =$$

$$= \frac{|u(x)|}{d_n} \leqslant \sqrt{\frac{w(x)}{d_n^2}} \leqslant \sqrt{\frac{w(1)}{d_n^2}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\int_1^x \frac{q^2(s)\,ds}{\sigma^{5/2}(s)}}. \tag{24}$$

En vertu de l'inégalité (21), on a

$$\sqrt{\frac{w(1)}{d_n^2}} \leqslant \frac{C_2}{n^{1/4}}. \tag{25}$$

Puisque $q(x)$ est un polynôme du second degré et que $\sigma(x) = x$, il existe une constante $C_3$ indépendante de $n$, telle que

$$\sqrt{\int_1^x \frac{q^2(s)\,ds}{\sigma^{5/2}(s)}} \leqslant C_3 x^{5/4}. \tag{26}$$

Confrontant les formules (24) à (26), on obtient pour $x > 1$ et $\alpha + 1/2 > 0$

$$x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} e^{-\frac{x}{2}} \frac{|L_n^\alpha(x)|}{d_n} \leqslant \frac{C_2}{n^{1/4}} + \frac{C_3 x^{5/4}}{n^{1/2}}. \tag{27}$$

On vérifie sans difficulté que cette évaluation reste vraie, quelle que soit la valeur de $x \geqslant 0$ (voir (22)).

Il est curieux que l'inégalité (27) reste vraie aussi pour $\alpha + 1/2 = 0$, car on a dans ce cas pour les polynômes de Laguerre

$$q(x) = \frac{x^2}{4} - \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) x + \frac{1}{4}\left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)\Big|_{\alpha=-1/2} = \frac{x^2}{4}.$$

Le point $x = 0$ n'est donc pas un point singulier dans l'inégalité (23), si bien qu'on peut, en faisant l'intégration dans (23), prendre $x = 0$ comme borne inférieure pour aboutir aussitôt à l'évaluation (27).

L'évaluation pour les polynômes d'Hermite se déduit de (27) pour $\alpha = \pm 1/2$ en utilisant les formules (14) et (15) du § 6:

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{|H_n(x)|}{d_n} \leqslant \frac{C_2}{n^{1/4}} + \frac{C_3 x^{5/2}}{n^{1/2}}. \tag{28}$$

*Remarque.* Si $x \in [x_1, x_2]$ et $a < x_1 < x_2 < b$, on tire de (20), (27), (28) des évaluations plus simples:

$$\frac{|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)|}{d_n} \leqslant C_1 \quad (\alpha + 1/2 > 0,\ \beta + 1/2 > 0), \tag{20a}$$

$$\frac{|L_n^\alpha(x)|}{d_n} \leqslant \frac{C_2}{n^{1/4}} \quad (\alpha + 1/2 > 0), \tag{27a}$$

$$\frac{|H_n(x)|}{d_n} \leqslant \frac{C_3}{n^{1/4}} \tag{28a}$$

(les constantes $C_1$, $C_2$, $C_3$ dépendent évidemment de $x_1$, $x_2$ et des paramètres $\alpha$, $\beta$).

On montre que les évaluations (20a) et (27a) restent vraies pour toute valeur réelle de $\alpha$ et de $\beta$. Prouvons-le dans le cas de l'inégali-

té (20a) par exemple, ou de l'inégalité équivalente

$$\sqrt{n}\,|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)|\leqslant C, \tag{19a}$$

où $C$ est une constante.

Faisons la démonstration par récurrence, en supposant que l'inégalité (19a) soit vraie pour les polynômes $P_n^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)$ et $P_n^{(\alpha+2,\beta+2)}(x)$. De l'équation différentielle pour les polynômes de Jacobi et de la formule de dérivation (6) du § 5 il ressort que

$$\sqrt{n}\,P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=-\frac{\sqrt{n}}{\lambda_n}\left[\tau(x)\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)+\sigma(x)\frac{d^2}{dx^2}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]=$$
$$=-\frac{\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)\,x}{2\sqrt{n}}P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)-$$
$$-\frac{1-r^2}{4}\left(1+\frac{\alpha+\beta+2}{n}\right)\sqrt{n}\;P_{n-2}^{(\alpha+2,\beta+2)}(x).$$

Puisque l'inégalité (19a) est vraie pour les polynômes $P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)$ et $P_{n-2}^{(\alpha+2,\beta+2)}(x)$, elle est vraie pour polynômes $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

On montre de même la validité de l'inégalité (27a) pour toute valeur réelle du paramètre $\alpha$.

## § 8. Développement des fonctions en séries suivant les polynômes orthogonaux classiques

**1. Généralités.** Dans les applications, il est souvent important de connaître des constantes $a_n$ susceptibles de garantir le plus petit écart moyen quadratique d'une fonction $f(x)$:

$$m_N=\int_a^b\left[f(x)-\sum_{n=0}^{N}a_n y_n(x)\right]^2\rho(x)\,dx,$$

où $y_n(x)$ sont des fonctions orthogonales sur l'intervalle $]a,b[$ par rapport au poids $\rho(x)\geqslant 0$, et la fonction $f(x)$ vérifie la condition

$$\int_a^b f^2(x)\,\rho(x)\,dx<\infty.$$

En vertu de l'orthogonalité des fonctions $y_n(x)$, on a

$$m_N=\int_a^b f^2(x)\,\rho(x)\,dx-2\sum_{n=0}^{N}a_n\int_a^b f(x)\,y_n(x)\,\rho(x)\,dx+$$
$$+\sum_{n=0}^{N}a_n^2\int_a^b y_n^2(x)\,\rho(x)\,dx.$$

En posant

$$d_n^2 = \int_a^b y_n^2(x)\,\rho(x)\,dx, \quad C_n = \frac{1}{d_n^2}\int_a^b f(x)\,y_n(x)\,\rho(x)\,dx,$$

on obtient

$$m_N = \int_a^b f^2(x)\,\rho(x)\,dx + \sum_{n=0}^{N}(a_n - C_n)^2 d_n^2 - \sum_{n=0}^{N} C_n^2 d_n^2.$$

On remarque que $m_N$ passe par un minimum pour $a_n = C_n$, i.e.

$$\Delta_N = \min m_N = \int_a^b f^2(x)\,\rho(x)\,dx - \sum_{n=0}^{N} C_n^2 d_n^2.$$

Puisque les constantes $C_n$ sont indépendantes de $N$, la suite $\{\Delta_N\}$ est monotone, non croissante et bornée inférieurement ($\Delta_N \geqslant 0$). Il existe donc une limite non négative $\lim\limits_{N\to\infty} \Delta_N$ et la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n^2 d_n^2$ est convergente, de sorte que

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 d_n^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,\rho(x)\,dx. \tag{1}$$

Cette inégalité est appelée *inégalité de Bessel.*

Si $\lim\limits_{N\to\infty} \Delta_N = 0$, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n y_n(x), \tag{2}$$

où

$$C_n = \frac{1}{d_n^2}\int_a^b f(x)\,y_n(x)\,\rho(x)\,dx, \tag{3}$$

et la série dans le second membre de (2) est convergente en moyenne sur $]a, b[$ par rapport au poids $\rho(x)$, i. e.

$$\lim_{N\to\infty}\int_a^b \left[f(x) - \sum_{n=0}^{N} C_n y_n(x)\right]^2 \rho(x)\,dx = 0. \tag{4}$$

Dans ce cas la relation (1) s'écrit

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 d_n^2 = \int_a^b f^2(x)\,\rho(x)\,dx.$$

Cette dernière égalité est dite *égalité de Parseval.*

Si la relation (4) reste vraie pour toute fonction $f(x)$ de carré intégrable, i.e. telle que

$$\int_a^b f^2(x)\,\rho(x)\,dx < \infty, \tag{5}$$

on dit que le système de fonctions $\{y_n(x)\}$ est *complet*. Il est facile de montrer que tout système de fonctions complet doit nécessairement être fermé; cela revient à demander que les égalités

$$\int_a^b f(x)\,y_n(x)\,\rho(x)\,dx = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{6}$$

donnent lieu à l'égalité $f(x) \equiv 0$ pour $x \in ]a, b[$, quelles que soient les fonctions $f(x)$ vérifiant la condition (5). Ainsi donc, pour qu'il soit possible de développer une fonction $f(x)$ suivant un système de fonctions orthogonales $\{y_n(x)\}$, il faut que le système en question soit fermé.

**2. Fermeture d'un système de polynômes orthogonaux.** Montrons que le *système de polynômes* $\{p_n(x)\}$ *est fermé pour des fonctions continues* $f(x)$ *si la fonction* $\rho(x)$ *est continue sur l'intervalle* $]a, b[$ *et s'il existe une constante* $C_0 > 0$ *telle que*

$$\int_a^b e^{C_0|x|}\rho(x)\,dx < \infty. \tag{7}$$

Pour la démonstration, considérons une fonction $f(x)$ continue sur $]a, b[$ et vérifiant les conditions (5) et (6). Considérons en outre une fonction d'une variable complexe

$$F(z) = \int_a^b e^{ixz} f(x)\,\rho(x)\,dx \tag{8}$$

dans la bande $|\operatorname{Im} z| \leqslant C$ pour $C < \frac{C_0}{2}$. Montrons que la fonction $F(z)$ est analytique dans cette bande. A cet effet, il suffit de montrer que l'intégrale (8) est uniformément convergente. Puisqu'on a dans la bande considérée

$$|e^{ixz} f(x)\,\rho(x)| \leqslant e^{x \operatorname{Im} z} |f(x)|\,\rho(x) \leqslant e^{\frac{C_0}{2}|x|} |f(x)|\,\rho(x),$$

l'intégrale $F(z)$ sera uniformément convergente dans cette bande, à condition que l'intégrale

$$\int_a^b e^{\frac{C_0}{2}|x|} |f(x)|\,\rho(x)\,dx$$

soit convergente. Or, la convergence de la dernière intégrale résulte de l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski :

$$\int_a^b e^{\frac{C_0}{2}|x|} |f(x)| \rho(x)\, dx \leqslant \sqrt{\int_a^b e^{C_0|x|} \rho(x)\, dx \int_a^b f^2(x) \rho(x)\, dx} < \infty.$$

En vertu du théorème sur l'analyticité de l'intégrale dépendant d'un paramètre, la fonction $F(z)$ est analytique dans la bande $|\operatorname{Im} z| \leqslant C$ et, en particulier, dans le cercle $|z| \leqslant C$. Elle se laisse donc développer en série de Taylor :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(0) \frac{z^n}{n!}, \quad |z| \leqslant C. \tag{9}$$

Utilisant des évaluations analogues, on montre facilement la convergence uniforme, dans le même domaine, de toute intégrale résultant de la dérivation par rapport à $z$ de l'expression sous le signe d'intégration. Cela signifie qu'en calculant les dérivées $F^{(n)}(0)$, on peut faire la dérivation sous le signe d'intégration, d'où

$$F^{(n)}(0) = \int_a^b (ix)^n f(x) \rho(x)\, dx \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots).$$

En développant $(ix)^n$ suivant les polynômes $p_k(x)$ pour $k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n$ et en utilisant l'égalité (6), on obtient

$$F^{(n)}(0) = \int_a^b (ix)^n f(x) \rho(x)\, dx =$$

$$= \int_a^b \left[ \sum_{k=0}^{n} C_{kn} p_k(x) \right] f(x) \rho(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} C_{kn} \int_a^b f(x) p_k(x) \rho(x)\, dx = 0.$$

Puisque $F^{(n)}(0) = 0$, il ressort de (9) que $F(z)$ s'annule dans le cercle $|z| \leqslant C$. En vertu du principe du prolongement analytique, on a $F(z) = 0$ pour tout $z$ appartenant au domaine d'analyticité de $F(z)$. On a en particulier $F(z) = 0$ pour tout $z$ réel.

Il est évident que la formule (8) de $F(z)$ peut être récrite sous la forme

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixz} f(x) \rho(x)\, dx, \tag{10}$$

à condition de poser $f(x) \rho(x) = 0$ pour $x < a$ et $x > b$.

Pour des $z$ réels, l'expression (10) de $F(z)$ est le coefficient du développement de la fonction $f(x) \rho(x)$ en intégrale de Fourier. D'après

l'égalité de Parseval, on a pour l'intégrale de Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(x)\,\rho(x)]^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(z)|^2\,dz = 0.$$

Alors, puisque la fonction $f(x)$ est continue et que le poids $\rho(x)$ est positif pour $x \in ]a, b[$, on obtient $f(x) \equiv 0$ sur l'intervalle $]a, b[$ ; autrement dit, le système de polynômes orthogonaux $p_n(x)$ est bien fermé sur l'intervalle $]a, b[$.

Utilisant la forme explicite de la fonction $\rho(x)$ pour les polynômes orthogonaux classiques, on montre facilement que toutes les conditions énumérées plus haut pour la fonction $\rho(x)$ ont lieu avec les polynômes orthogonaux classiques. Pour les polynômes de Laguerre, il suffit de choisir $C_0 < 1$ ; pour les polynômes de Jacobi et d'Hermite, la condition (7) est automatiquement vérifiée pour tout $C_0 > 0$. On voit donc que *tout système de polynômes orthogonaux classiques est fermé* sur l'intervalle $]a, b[$ pour toute fonction continue $f(x)$ vérifiant la condition (5).

**3. Théorème de développement.** Le fait que tout système de polynômes orthogonaux classiques est fermé et les évaluations faites dans le § 7 permettent d'établir les conditions dans lesquelles une fonction arbitraire $f(x)$ est développable en série (2). Démontrons le théorème de développement suivant.

THÉORÈME 1. *Supposons que la fonction $f(x)$ soit continue pour $a < x < b$ et admette une dérivée continue par morceaux sur $]a, b[$ ; soient $y_n(x)$ des polynômes orthogonaux classiques par rapport au poids $\rho(x)$. Si les intégrales*

$$\int_a^b f^2(x)\,\rho(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_a^b [f'(x)]^2\,\sigma(x)\,\rho(x)\,dx$$

*sont convergentes, la fonction $f(x)$ admet le développement* (2) *sur l'intervalle $]a, b[$ suivant les polynômes $y_n(x)$ et la série* (2) *est uniformément convergente en $x$ sur n'importe quel segment $[x_1, x_2] \subset \subset ]a, b[$.*

D é m o n s t r a t i o n. Donnons d'abord une évaluation des coefficients de Fourier $C_n$. Nous avons vu au § 5 que les dérivées des polynômes orthogonaux classiques sont elles-mêmes des polynômes classiques orthogonaux sur l'intervalle $]a, b[$ par rapport au poids $\sigma(x)\,\rho(x)$. Donc, conformément à l'inégalité de Bessel (4), les coefficients $\widetilde{C}_n$ du développement de la fonction $f'(x)$ suivant

les polynômes $y'_n(x)$ vérifient l'inégalité suivante:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{C}_n^2 \widetilde{d}_n^2 \leqslant \int_a^b [f'(x)]^2 \sigma(x) \rho(x)\, dx < \infty,$$

où

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{C}_n &= \frac{1}{\widetilde{d}_n^2} \int_a^b f'(x) y'_n(x) \sigma(x) (\rho)(x)\, dx, \\ \widetilde{d}_n^2 &= \int_a^b [y'_n(x)]^2 \sigma(x) \rho(x)\, dx. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Cherchons la relation entre les coefficients $\widetilde{C}_n$ et $C_n$. Intégrant par parties et faisant intervenir l'équation différentielle

$$(\sigma\rho y_n)' + \lambda_n \rho y_n = 0,$$

nous obtenons

$$\int_{x_1}^{x_2} f'(x) y'_n(x) \sigma(x) \rho(x)\, dx =$$

$$= f(x) y'_n(x) \sigma(x) \rho(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} f(x) [\sigma(x) \rho(x) y'_n(x)]'\, dx =$$

$$= f(x) y'_n(x) \sigma(x) \rho(x) \Big|_{x_1}^{x_2} + \lambda_n \int_{x_1}^{x_2} f(x) y_n(x) \rho(x)\, dx \qquad (12)$$

$$(a < x_1 < x_2 < b).$$

Les intégrales dans (12) admettent des limites finies pour $x_1 \to a$ ou $x_2 \to b$ par hypothèse et en vertu de l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski. Il existe donc des limites finies

$$\lim_{x \to a} f(x) y'_n(x) \sigma(x) \rho(x) = A_n,$$

$$\lim_{x \to b} f(x) y'_n(x) \sigma(x) \rho(x) = B_n.$$

Montrons que $B_n = 0$. Supposons que $B_n \neq 0$ pour une certaine valeur de $n$. On a alors pour $x \to b$

$$f(x) \approx \frac{B_n}{y'_n(x) \sigma(x) \rho(x)}. \qquad (13)$$

De la forme explicite de $\rho(x)$ et de la relation (13) il ressort que pour $B_n \neq 0$ la fonction $f(x)$ ne vérifie pas la condition de conver-

gence de l'intégrale

$$\int_a^b f^2(x)\,\rho(x)\,dx.$$

En effet, si $b$ est un nombre fini, on a pour $x \to b$ (voir § 5, n° 1)

$$\sigma(x) \sim b - x, \quad \rho(x) \sim (b-x)^{\alpha} \quad (\alpha > -1),$$

d'où

$$f(x) \sim \frac{1}{(b-x)^{\alpha+1}}, \quad f^2(x)\,\rho(x) \sim \frac{1}{(b-x)^{\alpha+2}}.$$

On voit que pour $\alpha > -1$ l'intégrale

$$\int_a^b f^2(x)\,\rho(x)\,dx$$

est divergente.

On étudie d'une façon analogue le comportement de la fonction $f^2(x)\,\rho(x)$ pour $x \to b$ quand $b = +\infty$. Cela prouve que $B_n = 0$ pour $n$ quelconque. En étudiant le comportement de la fonction $f^2(x)\,\rho(x)$ pour $x \to a$ de la même manière, on aboutit à l'égalité $A_n = 0$.

C'est pourquoi, en passant dans (12) à la limite pour $x_1 \to a$ et $x_2 \to b$, on obtient

$$\int_a^b f'(x)\,y_n'(x)\,\sigma(x)\,\rho(x)\,dx = \lambda_n \int_a^b f(x)\,y_n(x)\,\rho(x)\,dx.$$

En particulier, pour $f(x) = y_n(x)$ on a $\widetilde{d}_n^2 = \lambda_n d_n^2$, d'où $\widetilde{C}_n = C_n$. Puisque la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \widetilde{C}_n^2 \widetilde{d}_n^2$ est convergente, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n^2 d_n^2 \lambda_n$ doit être convergente, elle aussi.

Montrons maintenant que la série en question $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n y_n(x)$ est uniformément convergente pour $a < x_1 \leqslant x \leqslant x_2 < b$. Compte tenu de l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski, on obtient

$$\left| \sum_{n=N_1}^{N_2} C_n y_n(x) \right| \leqslant \sum_{n=N_1}^{N_2} |C_n d_n \sqrt{\lambda_n}|\, \frac{|y_n(x)|}{\sqrt{\lambda_n}\, d_n} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{n=N_1}^{N_2} C_n^2 d_n^2 \lambda_n \sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{y_n^2(x)}{\lambda_n d_n^2}} \leqslant \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 d_n^2 \lambda_n}\, \sqrt{\sum_{n=N_1}^{\infty} \frac{y_n^2(x)}{\lambda_n d_n^2}} \qquad (14)$$

si la série $\sum\limits_{n=N_1}^{\infty} \frac{y_n^2(x)}{\lambda_n d_n^2}$ est convergente.

Pour évaluer $y^2(x)/(\lambda_n d_n^2)$, il est commode de faire un changement linéaire de la variable indépendante de façon à mettre le poids $\rho(x)$ et les polynômes $y_n(x)$ sous forme canonique (voir § 5). Le seul effet d'un tel changement sur la quantité $y_n^2(x)/(\lambda_n d_n^2)$ sera de la multiplier par un facteur constant indépendant de $n$. C'est pourquoi, en étudiant la convergence de la série $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{y_n^2(x)}{\lambda_n d_n^2}$, on peut se borner aux cas où $y_n(x)$ sont des polynômes de Jacobi, de Laguerre ou d'Hermite. Utilisant les évaluations grossières déduites au § 7, n° 3, on montre que la série en question est uniformément convergente pour $a < x_1 \leqslant x \leqslant x_2 < b$ et l'on est en mesure d'en majorer la somme.

Faisons des évaluations correspondantes pour les polynômes de Laguerre $y_n(x) = L_n^\alpha(x)$, auquel cas on a $a = 0$, $b = \infty$, $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$. Conformément à l'inégalité (27a) du § 7, pour $0 < x_1 \leqslant x \leqslant x_2 < \infty$ on a

$$\frac{1}{d_n}\,|L_n^\alpha(x)| < \frac{C}{n^{1/4}} \quad (C \text{ est une constante}),$$

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{y_n^2(x)}{\lambda_n d_n^2} \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} \frac{C}{n^{3/2}}. \tag{15}$$

On en conclut immédiatement à la convergence uniforme, dans le domaine $0 < x_1 \leqslant x \leqslant x_2 < \infty$, de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n^2(x)}{\lambda_n d_n^2}$ pour $y_n(x) = L_n^\alpha(x)$. Dans les autres cas la démonstration est analogue.

On voit donc qu'en vertu des évaluations (14) la série $\sum_{n=0}^{\infty} C_n y_n(x)$ est uniformément convergente pour $a < x_1 \leqslant x \leqslant x_2 < b$; puisque $x_1$, $x_2$ sont arbitraires, la série en question est une fonction continue sur l'intervalle $]a, b[$.

Considérons la fonction

$$\bar{f}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} C_k y_k(x).$$

Cherchons les coefficients de Fourier de son développement en série suivant les polynômes $y_n(x)$. Il vient

$$\int_a^b \bar{f}(x)\, y_n(x)\, \rho(x)\, dx = \int_a^b y_n(x)\, \rho(x) \left[ f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} C_k y_k(x) \right] dx =$$

$$= C_n d_n^2 - \sum_{k=0}^{N-1} C_k \int_a^b y_n(x)\, y_k(x)\, \rho(x)\, dx - I_N, \tag{16}$$

où

$$I_N = \int_a^b y_n(x)\,\rho(x)\Big[\sum_{k=N}^{\infty} C_k y_k(x)\Big]\,dx.$$

Puisque

$$\int_a^b y_n(x)\,y_k(x)\,\rho(x)\,dx = 0 \quad \text{pour} \quad k \neq n,$$

on obtient pour $N > n$

$$\int_a^b \bar{f}(x)\,y_n(x)\,\rho(x)\,dx = -I_N. \tag{17}$$

Evaluons la quantité $I_N$ à l'aide de l'inégalité (14) en posant $N_1 = N$, $N_2 = \infty$:

$$|I_N| \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} C_k^2 d_k^2 \lambda_k}\int_a^b |y_n(x)|\,\rho(x)\sqrt{\sum_{k=N}^{\infty}\frac{y_k^2(x)}{\lambda_k d_k^2}}\,dx.$$

Les évaluations du type (15) permettent de montrer que $I_N \to 0$ quand $N \to \infty$. En passant à la limite dans (17), on obtient

$$\int_a^b \bar{f}(x)\,y_n(x)\,\rho(x)\,dx = 0.$$

Remarquant que cette égalité est vraie pour $n$ quelconque, la fonction $\bar{f}(x)$ est continue pour $a < x < b$ et le système de polynômes orthogonaux classiques est fermé, on en déduit que $\bar{f}(x) \equiv 0$ pour $a < x < b$, ce qui démontre la validité du développement

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n y_n(x). \quad \blacksquare$$

*Remarque 1.* Nous venons de démontrer le théorème de développement pour des fonctions $f(x)$ soumises à certaines conditions, bien que peu restrictives. Quitte à compliquer la démonstration, on prouve un théorème de développement plus général. Pour le faire, on met d'abord l'équation différentielle pour les polynômes orthogonaux classiques sous sa forme la plus élémentaire (voir § 18, n° 1):

$$u''(s) + [\lambda - q(s)]\,u(s) = 0 \quad (0 \leqslant s \leqslant s_0). \tag{18}$$

Les fonctions propres de l'équation différentielle initiale se transformeront alors en fonctions propres $u = u_n(s)$ de l'équation (18). Puis l'on prouve un théorème de développement suivant les fonc-

tions $u_n(s)$ *) qui est plus général que celui de développement suivant les polynômes orthogonaux classiques.

THÉORÈME 2 (THÉORÈME DE CONVERGENCE SIMULTANÉE). *Si $f(s)$ est une fonction telle que l'intégrale $\int_0^{s_0} f^2(s)\,ds$ est convergente, le développement de $f(s)$ suivant les fonctions propres de l'équation différentielle (18) sur l'intervalle $0 < s < s_0$ est convergent ou divergent en même temps que son développement en série de Fourier trigonométrique sur cet intervalle (si $s_0 = \infty$, on prendra l'intégrale de Fourier au lieu de la série de Fourier).*

*Remarque 2.* Si, dans le développement de la fonction $f(x)$ en série suivant les polynômes orthogonaux classiques $y_n(x)$, la convergence en moyenne suffit, on se servira utilement du fait, connu du cours d'Analyse, que, pour des fonctions $f(x)$ vérifiant la condition (5), une telle convergence découle directement du fait que le système $\{y_n(x)\}$ est fermé, à condition que les intégrales définies soient des intégrales de Lebesgue.

## § 9. Problèmes de valeurs propres conduisant aux polynômes orthogonaux classiques

**1. Position du problème.** Proposons-nous de résoudre des équations du type hypergéométrique

$$\sigma(x)\,y'' + \tau(x)\,y' + \lambda y = 0 \qquad (1)$$

pour diverses valeurs de $\lambda$ dans le cas où la fonction $\rho(x)$, solution de l'équation $(\sigma\rho)' = \tau\rho$, est bornée sur un certain intervalle $]a, b[$ et vérifie sur cet intervalle les conditions imposées à la fonction $\rho(x)$ pour les polynômes orthogonaux classiques.

On a vu plus haut que les solutions les plus simples de l'équation (1) sont des polynômes orthogonaux classiques $y_n(x)$ qui correspondent aux valeurs propres

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

On constate que, parmi toutes les solutions de (1) pour différentes valeurs de $\lambda$, les polynômes orthogonaux classiques se distinguent non seulement par leur simplicité mais aussi par le fait qu'ils sont les seules solutions non triviales possibles de (1) pour lesquelles la fonction $y(x)\sqrt{\rho(x)}$ soit bornée et de carré intégrable sur l'intervalle $]a, b[$.

*) Cette question est traitée en détail dans le livre: Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, *Введение в спектральную теорию*. М., «Наука», 1970 (B. Lévitan, I. Sargssian, *Introduction à la théorie spectrale*. M., « Naouka », 1970).

Cette propriété des polynômes orthogonaux classiques est largement utilisée dans les problèmes de mécanique quantique où il s'agit de chercher les niveaux d'énergie et les fonctions d'onde d'une particule mobile dans un champ de forces. Si la particule, retenue dans un domaine borné de l'espace par des forces extérieures, ne peut pas s'éloigner à l'infini, on parle des états liés de la particule. Pour déterminer les fonctions d'onde $\psi(r)$, définissant ces états, et les niveaux d'énergie correspondants $E$, on est amené à résoudre l'équation stationnaire de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\psi+U\psi=E\psi$$

dans laquelle $\hbar$ est la constante de Planck, $\mu$ la masse de la particule, $U = U(r)$ l'énergie potentielle, $r$ le rayon vecteur.

La fonction d'onde $\psi(r)$ sera bornée pour toute valeur finie de $|r|$ et devra vérifier la condition de normalisation

$$\int_V |\psi(r)|^2\,d\tau=1. \tag{2}$$

Dans bon nombre de problèmes de mécanique quantique résolubles analytiquement par séparation des variables, l'équation de Schrödinger conduit à des équations généralisées du type hypergéométrique (voir § 1) :

$$u''+\frac{\tilde\tau(x)}{\sigma(x)}u'+\frac{\tilde\sigma(x)}{\sigma^2(x)}u=0 \quad (a<x<b). \tag{3}$$

L'énergie $E$ intervient comme paramètre dans les coefficients de l'équation (3). Il est supposé que $\sigma(x)>0$ pour $x\in\,]a, b[$ et que $\sigma(x)=0$ aux extrémités de l'intervalle $]a, b[$ si celles-ci ne sont pas rejetées à l'infini ; autrement dit, les extrémités de l'intervalle sont des points singuliers de l'équation différentielle (3). Celle-ci étant exempte de points singuliers pour tout $x\in\,]a, b[$, la fonction $u(x)$ est une fonction continue différentiable sur $]a, b[$ et n'aurait des singularités que pour $x\to a$ et $x\to b$. Pour énoncer les restrictions supplémentaires imposées à la fonction $u(x)$ aux extrémités de l'intervalle $]a, b[$, mettons l'équation (3) sous forme auto-adjointe :

$$(\sigma\tilde\rho u')'+\frac{\tilde\sigma}{\sigma}\tilde\rho u=0. \tag{4}$$

Ici la fonction $\tilde\rho(x)>0$ est solution de l'équation différentielle

$$(\sigma\tilde\rho)'=\tilde\tau\tilde\rho. \tag{5}$$

Pour que la fonction d'onde $\psi(r)$ soit bornée et la condition de normalisation (2) soit vérifiée, il convient de poser le problème pour

l'équation (4) de la façon suivante: *chercher toutes les valeurs de l'énergie E pour lesquelles l'équation* (4) *admet sur l'intervalle* ]$a$, $b$[ *des solutions non triviales* $u(x)$ *telles que les fonctions* $u(x)\sqrt{\tilde{\rho}(x)}$ *soient bornées et de carré intégrable sur* ]$a$, $b$[, *i. e.*

$$|u(x)\sqrt{\tilde{\rho}(x)}| < C \quad (\textit{où } C \textit{ est une constante})$$

*et*

$$\int_a^b |u(x)|^2 \tilde{\rho}(x)\, dx < \infty$$

(*si a et b ne sont pas rejetées à l'infini, la dernière condition peut être omise*).

On a vu dans le § 1 que le changement $u = \varphi(x)\, y$ permet de réduire l'équation (3) à une équation du type hypergéométrique

$$\frac{d}{dx}\left[\sigma\rho\frac{dy}{dx}\right] + \lambda\rho y = 0 \tag{6}$$

dans laquelle la fonction $\rho(x)$ vérifie l'équation différentielle $(\sigma\rho)' = \tau\rho$ et la fonction $\tau(x)$ est liée aux fonctions $\tilde{\tau}(x)$ et $\varphi(x)$ par la relation

$$\tau = \tilde{\tau} + 2\frac{\varphi'}{\varphi}\sigma.$$

De cette relation et de l'équation (5) il résulte que $\rho(x) = \tilde{\rho}(x)\,\varphi^2(x)$. Aussi les restrictions imposées à la fonction $u(x)\sqrt{\tilde{\rho}(x)}$ se ramènent-elles aux conditions énumérées plus haut pour la fonction $y(x)\sqrt{\rho(x)}$. Les valeurs de $\lambda$ pour lesquelles le problème posé admet des solutions non triviales sont appelées *valeurs propres*, et les fonctions correspondantes $y(x, \lambda)$, *fonctions propres*.

On a vu au § 1 qu'il existe plus d'un procédé pour ramener (3) à (6). Pour la plupart des problèmes de mécanique quantique admettant une solution analytique, il existe sûrement un moyen de faire que la fonction $\rho(x)$ soit bornée sur ]$a$, $b$[ et vérifie sur cet intervalle les restrictions imposées aux fonctions $\rho(x)$ dans le cas des polynômes orthogonaux classiques.

*Remarque.* Pour qu'une fonction poids vérifie les restrictions imposées aux fonctions $\rho(x)$ dans le cas des polynômes orthogonaux classiques, il faut que le polynôme $\tau(x)$ s'annule en un point de l'intervalle [$a$, $b$] et admette une dérivée négative, i.e. $\tau' < 0$.

En effet, il ressort de la formule de Rodrigues que $y_1(x) = B_1\tau(x)$, ce qui veut dire que le polynôme $\tau(x)$, admet une racine sur ]$a$, $b$[. En outre, la formule (3) du § 7 donne pour le carré de

la norme:

$$d_1^2 = -a_1 B_1 \int_a^b \sigma(x) \rho(x)\, dx = -B_1^2 \tau' \int_a^b \sigma(x) \rho(x)\, dx.$$

Comme $\sigma(x) > 0$ pour $x \in ]a, b[$ et $d_1^2 > 0$, on doit avoir $\tau' < 0$.

Cette remarque facilite le choix du procédé pour passer de (3) à (6): il suffit de choisir la constante $k$ et le signe de la racine dans la formule (11) du § 1 pour $\pi(x)$ de telle façon que la fonction

$$\tau(x) = \tilde{\tau}(x) + 2\pi(x)$$

vérifie les conditions indiquées.

**2. Polynômes orthogonaux classiques comme fonctions propres dans certains problèmes de valeurs propres.** Reprenons le problème de valeurs propres formulé au n° 1.

THÉORÈME. *Supposons que la fonction $y = y(x)$ soit solution de l'équation du type hypergéométrique*

$$\sigma(x) y'' + \tau(x) y' + \lambda y = 0$$

*et que la fonction $\rho(x)$, solution de l'équation $(\sigma\rho)' = \tau\rho$, soit bornée sur un intervalle $]a, b[$ et vérifie sur cet intervalle les conditions imposées aux fonctions $\rho(x)$ pour les polynômes orthogonaux classiques. Dans ce cas l'équation du type hypergéométrique n'admet de solutions non triviales, telles que la fonction $y(x)\sqrt{\rho(x)}$ soit bornée et de carré intégrable sur $]a, b[$, que pour*

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{7}$$

*et ces solutions s'écrivent sous la forme*

$$y(x, \lambda_n) = y_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n}[\sigma^n(x)\rho(x)], \tag{8}$$

*i.e. ce sont des polynômes classiques orthogonaux sur $]a, b[$ par rapport au poids $\rho(x)$ (si $a$ et $b$ sont à distance finie, la condition de carré intégrable peut être omise).*

D é m o n s t r a t i o n. Le fait que les polynômes orthogonaux classiques $y_n(x)$ sont des solutions non triviales du problème pour $\lambda = \lambda_n$ se vérifie immédiatement.

Montrons que ce sont les seules solutions non triviales du problème. Supposons le contraire, i.e. que pour une certaine valeur de $\lambda$ il existe une solution non triviale $y = y(x, \lambda)$ qui ne soit pas un polynôme orthogonal classique. On a

$$(\sigma\rho y')' + \lambda\rho y = 0, \quad (\sigma\rho y_n')' + \lambda_n \rho y_n = 0.$$

Multiplions la première équation par $y_n(x)$ et la seconde par $y(x, \lambda)$. Retranchons la seconde de la première et intégrons de $x_1$ à $x_2$ pour

$a < x_1 < x_2 < b$ (remarquons que les équations pour $y(x, \lambda)$ et $y_n(x)$ n'admettent aucun point singulier à l'intérieur du segment $[x_1, x_2]$). Il vient alors

$$(\lambda - \lambda_n) \int_{x_1}^{x_2} y(x, \lambda) y_n(x) \rho(x)\, dx + \sigma(x) \rho(x) W(y_n, y) \Big|_{x_1}^{x_2} = 0, \tag{9}$$

où

$$W(y_n, y) = y_n(x) y'(x, \lambda) - y'_n(x) y(x, \lambda)$$

est le wronskien. Pour $\lambda \neq \lambda_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ il découle de (9) que

$$\lim_{x \to a} \sigma(x) \rho(x) W(y_n, y) = C_1, \tag{10}$$

$$\lim_{x \to b} \sigma(x) \rho(x) W(y_n, y) = C_2 \tag{11}$$

($C_1$, $C_2$ sont des constantes).

Pour la démonstration, il suffit de passer dans (9) à la limite pour $x_1 \to a$ ou respectivement pour $x_2 \to b$ et de faire jouer la convergence de l'intégrale

$$\int_a^b y(x, \lambda) y_n(x) \rho(x)\, dx.$$

La convergence de cette intégrale découle de l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} y(x, \lambda) y_n(x) \rho(x)\, dx \right| \leqslant \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} y^2(x, \lambda) \rho(x)\, dx \int_{x_1}^{x_2} y_n^2(x) \rho(x)\, dx}$$

et de la convergence des intégrales

$$\int_a^b y^2(x, \lambda) \rho(x)\, dx, \quad \int_a^b y_n^2(x) \rho(x)\, dx.$$

Les relations (10, 11) restent vraies aussi pour $\lambda = \lambda_n$ en posant $C_1 = C_2 = C$, car il ressort de (9) que pour $\lambda = \lambda_n$

$$\sigma(x) \rho(x) W[y_n(x), y(x, \lambda)] = \text{const.}$$

Montrons que la constante $C_2$ est égale à zéro dans (11). Puisque

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{y(x, \lambda)}{y_n(x)} \right] = \frac{W[y_n(x), y(x, \lambda)]}{y_n^2(x)},$$

on a

$$y(x, \lambda) = y_n(x) \left[ \frac{y(x_0, \lambda)}{y_n(x_0)} + \int_{x_0}^{x} \frac{W[y_n(s), y(s, \lambda)]}{y_n^2(s)} ds \right], \tag{12}$$

Choisissons dans (12) un point $x_0 < b$ de façon qu'il soit situé plus à droite que tous les zéros du polynôme $y_n(x)$. Pour se représenter l'allure de la fonction $y(x, \lambda)$ pour $x \to b$, nous ferons intervenir la forme explicite de la fonction $\rho(x)$ (voir § 5, n° 1). Trois cas sont à distinguer alors:

1) $b$ est un nombre fini ; on a pour $x \to b$

$$\sigma(x) \sim b - x, \quad \rho(x) \sim (b - x)^{\alpha} \quad (\alpha \geqslant 0);$$

2) $b = +\infty$; on a pour $x \to +\infty$

$$\sigma(x) \sim x, \quad \rho(x) \sim x^{\alpha} e^{\beta x} \quad (\alpha \geqslant 0, \quad \beta < 0);$$

3) $b = +\infty$; on a pour $x \to +\infty$

$$\sigma(x) = 1, \quad \rho(x) \sim e^{\alpha x^2 + \beta x} \quad (\alpha < 0).$$

En examinant la relation limite (11) pour $C_2 \neq 0$, on constate que dans le premier cas l'expression sous le signe d'intégration dans (12) se comporte pour $s \to b$ de la façon suivante:

$$\frac{W[y_n(s), y(s, \lambda)]}{y_n^2(s)} \approx \frac{C_2}{\sigma(s)\rho(s)y_n^2(s)} \sim \frac{1}{(b-s)^{\alpha+1}}.$$

On a donc pour $x \to b$

$$\sqrt{\rho(x)}\, y(x, \lambda) \sim \begin{cases} \dfrac{1}{(b-x)^{\alpha/2}} & \text{pour} \quad \alpha > 0, \\ \ln(b-x) & \text{pour} \quad \alpha = 0, \end{cases}$$

i. e. la fonction $\sqrt{\rho(x)}\, y(x, \lambda)$ n'est pas bornée. On est donc amené à poser dans le premier cas $C_2 = 0$.

Dans les deux cas qui restent, pour $x \to +\infty$, on fera intervenir le comportement asymptotique des fonctions figurant dans (12):

$$y_n(x) \sim x^n;$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{ds}{s^{\alpha+2n+1} e^{\beta s}} \sim \frac{1}{x^{\alpha+2n+1} e^{\beta x}} \quad (\beta < 0);$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{ds}{s^{2n} e^{\alpha s^2 + \beta s}} \sim \frac{1}{x^{2n+1} e^{\alpha x^2 + \beta x}} \quad (\alpha < 0).$$

La validité des deux dernières relations s'établit aisément en appliquant la règle de L'Hospital aux fonctions du premier et du second membre. On obtient donc pour $C_2 \neq 0$, quand $x \to +\infty$, le comportement suivant de la fonction $\sqrt{\rho(x)}\, y(x, \lambda)$:

deuxième cas:

$$\sqrt{\rho(x)}\, y(x, \lambda) \sim x^{-\left(\frac{\alpha}{2}+n+1\right)} e^{-\frac{\beta}{2} x} \quad (\beta < 0);$$

troisième cas :

$$\sqrt{\rho(x)}\, y(x, \lambda) \sim \frac{1}{x^{n+1} e^{\frac{\alpha}{2}x^2+\frac{\beta}{2}x}} \quad (\alpha < 0).$$

Dans les deux cas, la fonction $\sqrt{\rho(x)}\, y(x, \lambda)$ n'est pas de carré intégrable sur l'intervalle $]a, b[$. On a donc, ici encore, $C_2 = 0$. En faisant l'étude du comportement de la fonction $\sqrt{\rho(x)}\, y(x, \lambda)$ pour $x \to a$ d'une façon analogue, on aboutit à l'égalité $C_1 = 0$.

Ainsi donc, on vient de montrer que pour $n$ quelconque

$$\lim_{x\to a} \sigma(x)\rho(x) W(y_n, y) = 0,$$

$$\lim_{x\to b} \sigma(x)\rho(x) W(y_n, y) = 0.$$

Ces relations ne sont valables que pour $y(x, \lambda) \equiv 0$. En effet, si $\lambda \neq \lambda_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$, il ressort de la relation (9) pour $x_1 \to a$ et $x_2 \to b$ que

$$\int_a^b y(x, \lambda)\, y_n(x)\, \rho(x)\, dx = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Puisque le système de polynômes orthogonaux classiques est complet, la dernière égalité n'est possible que pour $y(x, \lambda) = 0$, où $x \in ]a, b[$.

Par contre, si $\lambda = \lambda_n$, on a en vertu de (10) $W(y_n, y) = 0$, i. e. les solutions $y_n(x)$ et $y(x, \lambda)$ s'avèrent linéairement dépendantes, contrairement à la définition. Le théorème est démontré. ■

**3. Problèmes de mécanique quantique conduisant aux polynômes orthogonaux classiques.** Nous montrerons à présent comment le théorème démontré dans le n° 2 s'applique à certains problèmes de mécanique quantique où l'équation de Schrödinger se laisse réduire à une équation généralisée du type hypergéométrique.

*Exemple 1.* Proposons-nous de chercher les valeurs propres de l'énergie $E$ et les fonctions propres pour l'*oscillateur harmonique linéaire*, i. e. pour une particule mobile dans un champ d'énergie potentielle $U = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$ ($m$ étant la masse de la particule, $x$ son écart de la position d'équilibre, $\omega$ la pulsation). Le problème de l'oscillateur harmonique joue un rôle fondamental dans le développement de l'électrodynamique quantique ; on y a recours en étudiant des oscillations de toute nature dans les cristaux et les molécules.

L'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde $\psi(x)$ de l'oscillateur harmonique s'écrit comme suit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{m\omega^2}{2}x^2\psi=E\psi \quad (-\infty<x<\infty).$$

La fonction $\psi(x)$ doit être bornée et vérifier la condition de normalisation

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi^2(x)\,dx=1.$$

Pour résoudre ce problème, il y a intérêt à passer de la coordonnée $x$ et de l'énergie $E$ à des variables sans dimension $\xi$ et $\varepsilon$ :

$$x=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,\xi=\alpha\xi, \qquad E=\hbar\omega\varepsilon.$$

On obtient alors l'équation

$$\psi''+(2\varepsilon-\xi^2)\,\psi=0$$

(la dérivation se fait par rapport à $\xi$). C'est une équation généralisée du type hypergéométrique pour laquelle

$$\sigma(\xi)=1, \quad \tilde{\tau}(\xi)=0, \quad \tilde{\sigma}(\xi)=2\varepsilon-\xi^2.$$

Le problème proposé appartient à la classe de problèmes déjà étudiée. En effet, on a ici $\tilde{\rho}(\xi)=1$. La condition du carré intégrable pour la fonction $\sqrt{\tilde{\rho}(\xi)}\,\psi(\xi)$ découle donc de la condition de normalisation.

Nous utiliserons la méthode de solution considérée précédemment. Réduisons l'équation pour la fonction $\psi(\xi)$ à une équation du type hypergéométrique

$$\sigma(\xi)\,y''+\tau(\xi)\,y'+\lambda y=0$$

en posant $\psi(\xi)=\varphi(\xi)\,y(\xi)$, où $\varphi(\xi)$ est solution de l'équation

$$\varphi'/\varphi=\pi(\xi)/\sigma(\xi).$$

Le polynôme $\pi(\xi)$ s'écrira alors comme suit :

$$\pi(\xi)=\pm\sqrt{k-2\varepsilon+\xi^2}.$$

La constante $k$ sera choisie de façon que le radicande admette des racines multiples, i. e. $k=2\varepsilon$. Des deux valeurs possibles du polynôme $\pi(\xi)=\pm\xi$, on choisira celle pour laquelle la fonction

$$\tau(\xi)=\tilde{\tau}(\xi)+2\pi(\xi)$$

admette une dérivée négative. Il en sera ainsi si l'on choisit $\tau(\xi) = -2\xi$, ce qui correspond à

$$\pi(\xi) = -\xi, \quad \varphi(\xi) = e^{-\xi^2/2},$$
$$\lambda = 2\varepsilon - 1, \quad \rho(\xi) = e^{-\xi^2}.$$

Les valeurs propres de l'énergie se cherchent à l'aide de l'équation

$$\lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' = 0\ ;$$

on obtient

$$\varepsilon = \varepsilon_n = n + \frac{1}{2},$$

et donc

$$E = E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots).$$

Les fonctions propres $y_n(\xi)$ se cherchent d'après la formule

$$y_n(\xi) = B_n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n}(e^{-\xi^2}).$$

Elles se confondent, à un facteur près, avec les polynômes d'Hermite $H_n(\xi)$. Pour la fonction d'onde $\psi(x)$ on obtient l'expression

$$\psi_n(x) = C_n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi), \quad x = \alpha\xi, \quad \alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

La constante $C_n$ se définit par la condition de normalisation

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2(x)\, dx = 1.$$

*Exemple 2.* Considérons un problème modèle où il s'agit de chercher les valeurs propres de l'énergie $E$ et les fonctions propres pour l'équation de Schrödinger à une dimension

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + U(x)\psi = E\psi \quad (-\infty < x < \infty)$$

qui définit le mouvement d'une particule dans un champ

$$U(x) = -\frac{U_0}{\operatorname{ch}^2 \alpha x}, \quad \text{où } U_0 > 0$$

(potentiel de Pöschl-Teller, voir S. Flügge, *Practical Quantum Mechanics*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971). La fonction $\psi(x)$ doit être bornée et vérifier la condition de normalisation

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(x)\, dx = 1.$$

Puisque $U(x) < 0$, on a toujours $E < 0$. Afin de simplifier l'équation, faisons le changement de la variable indépendante $s = \operatorname{th} \alpha x$ *). Ce changement nous conduit à une équation généralisée du type hypergéométrique

$$\psi'' + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}\psi' + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}\psi = 0$$

pour laquelle $a = -1$, $b = 1$,

$$\sigma(s) = 1 - s^2, \quad \tilde{\tau}(s) = -2s, \quad \tilde{\sigma}(s) = -\beta^2 + \gamma^2(1 - s^2),$$

$$\beta^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2}, \quad \gamma^2 = \frac{2mU_0}{\hbar^2\alpha^2} \quad (\beta > 0, \ \gamma > 0).$$

Le problème proposé appartient à une classe de problèmes déjà connue. En effet, on a ici $\tilde{\rho}(s) = 1$. Aussi la condition du carré intégrable pour la fonction $\sqrt{\tilde{\rho}(s)}\,\psi(s)$ découle-t-elle de la condition de normalisation. Nous utiliserons la méthode considérée précédemment. Amenons l'équation pour la fonction $\psi(s)$ à une équation du type hypergéométrique

$$\sigma(s)\,y'' + \tau(s)\,y' + \lambda y = 0$$

en posant $\psi(s) = \varphi(s)\,y(s)$, où $\varphi(s)$ est solution de l'équation

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\pi(s)}{\sigma(s)}.$$

Le polynôme $\pi(s)$ s'écrira alors comme suit :

$$\pi(s) = \pm\sqrt{\beta^2 - \gamma^2(1 - s^2) + k(1 - s^2)}.$$

La constante $k$ sera choisie de façon que le radicande admette des racines multiples, i. e. soit $k = \gamma^2$, soit $k = \gamma^2 - \beta^2$. On a dans le premier cas $\pi(s) = \pm\beta$, et dans le second $\pi(s) = \pm\beta s$. Des quatre valeurs possibles du polynôme $\pi(s)$, on choisira celle pour laquelle la fonction $\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s)$ admette une dérivée négative et une racine sur l'intervalle $]-1, +1[$. On prendra donc, afin de satisfaire à ces conditions,

$$\tau(s) = -2(1 + \beta)\,s,$$

*) Dans bon nombre de problèmes modèles de mécanique quantique résolubles analytiquement, on amène l'équation de Schrödinger à une équation à coefficients rationnels en opérant un changement naturel, suggéré par la forme de $U(x)$, de la variable indépendante. Il doit y avoir une correspondance biunivoque entre les variables ancienne et nouvelle. Puisque, dans le cas considéré, le potentiel se laisse exprimer très facilement à l'aide des fonctions hyperboliques, il y a intérêt à substituer à l'ancienne variable l'une des variables $\operatorname{sh} \alpha x$, $\operatorname{th} \alpha x$, $\exp(\pm\alpha x)$. Nous avons choisi $s = \operatorname{th} \alpha x$.

ce qui correspond à

$$\pi(s) = -\beta s, \quad \varphi(s) = (1-s^2)^{\frac{\beta}{2}},$$
$$\lambda = \gamma^2 - \beta^2 - \beta, \quad \rho(s) = (1-s^2)^{\beta}.$$

Les valeurs propres de l'énergie se cherchent à l'aide de l'équation

$$\lambda + n\tau' + \frac{1}{2} n(n-1)\sigma'' = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

qui conduit à l'égalité

$$\gamma^2 - \beta^2 - \beta = 2n(1+\beta) + n(n-1).$$

D'où l'on tire les valeurs propres de l'énergie:

$$E_n = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}\beta_n^2,$$

où $\beta_n = -n - \frac{1}{2} + \sqrt{\gamma^2 + \frac{1}{4}}$ $(\beta_n > 0)$. Pour que la condition $\beta_n > 0$ soit vérifiée, il doit y avoir

$$n < \sqrt{\gamma^2 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2},$$

ce qui signifie que le nombre des valeurs propres de l'énergie est toujours fini.

Les fonctions propres $y_n(s)$ s'écriront alors sous la forme

$$y_n(s) = P_n^{(\beta, \beta)}(s), \quad \beta = \beta_n.$$

Les fonctions d'onde $\psi_n(x)$ s'écriront comme suit:

$$\psi_n(x) = C_n(1-s^2)^{\frac{\beta}{2}} P_n^{(\beta, \beta)}(s),$$
$$\beta = \beta_n, \quad s = \operatorname{th} \alpha x.$$

La constante $C_n$ se définit par la condition de normalisation

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2(x)\, dx = 1.$$

Le lecteur trouvera au § 25 d'autres exemples d'application de la méthode décrite aux problèmes de mécanique quantique.

## § 10. Fonctions sphériques

**1. Résolution de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques.** Une classe importante de fonctions spéciales, étroitement liées aux polynômes orthogonaux classiques, est constituée par les fonc-

tions sphériques. On les rencontre par exemple en résolvant l'équation de Laplace en coordonnées sphériques. Puisque les solutions continues de l'équation de Laplace portent le nom de *fonctions harmoniques*, les fonctions sphériques sont parfois appelées *harmoniques sphériques*.

Cherchons les solutions bornées de l'équation de Laplace $\Delta u = 0$ en coordonnées sphériques $r$, $\theta$, $\varphi$. Nous savons que dans ce cas

$$\Delta u = \Delta_r u + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta,\,\varphi} u,$$

où

$$\Delta_r u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right),$$

$$\Delta_{\theta,\,\varphi} u = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Cherchons les solutions particulières par séparation des variables en posant $u = R(r)\, Y(\theta, \varphi)$. Substituons cette expression dans l'équation de Laplace. Il vient

$$\frac{r^2 \Delta_r R(r)}{R(r)} = -\frac{\Delta_{\theta,\,\varphi} Y(\theta, \varphi)}{Y(\theta, \varphi)}.$$

Puisque le premier membre de cette égalité est indépendant des variables $\theta$, $\varphi$ et le second de la variable $r$, on a

$$\frac{r^2 \Delta_r R(r)}{R(r)} = -\frac{\Delta_{\theta,\,\varphi} Y(\theta, \varphi)}{Y(\theta, \varphi)} = \mu,$$

où $\mu$ est une constante. Pour déterminer les fonctions $R(r)$ et $Y(\theta, \varphi)$. nous disposons des équations

$$(r^2 R')' = \mu R, \qquad (1)$$

$$\Delta_{\theta,\varphi} Y + \mu Y = 0. \qquad (2)$$

L'équation (2) sera résolue elle aussi par séparation des variables, en posant

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\, \Phi(\varphi).$$

Il vient alors

$$\frac{\sin\theta \dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \dfrac{d\Theta}{d\theta}\right)}{\Theta(\theta)} + \mu \sin^2\theta = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \nu,$$

où $\nu$ est une constante. On obtient donc pour les fonctions $\Phi(\varphi)$ et $\Theta(\theta)$ les équations

$$\Phi'' + \nu\Phi = 0, \qquad (3)$$

$$\sin\theta \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right) + (\mu \sin^2\theta - \nu)\, \Theta = 0. \qquad (4)$$

Puisque la fonction $\Phi(\varphi)$ doit être univoque, elle doit aussi être périodique, $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$. Dans ce cas l'équation (3) n'admet de solution que pour $\nu = m^2$, $m$ entier. Nous obtenons donc deux solutions linéairement indépendantes de (3):

$$\Phi_m(\varphi) = C_m e^{im\varphi},$$
$$\Phi_{-m}(\varphi) = C_{-m} e^{-im\varphi}$$

($C_m$ est une constante de normalisation).

Les fonctions $\Phi_m(\varphi) = C_m e^{im\varphi}$ $(m = 0, \pm 1, \ldots)$ vérifient les conditions d'orthogonalité du type

$$\int_0^{2\pi} \Phi_m^*(\varphi)\, \Phi_{m'}(\varphi)\, d\varphi = A_m \delta_{mm'},$$

où

$$A_m = 2\pi\, |C_m|^2, \quad \delta_{mm'} = \begin{cases} 1, & m' = m, \\ 0, & m' \neq m. \end{cases}$$

Choisissant $A_m = 1$, on trouve $C_m = 1/\sqrt{2\pi}$ et donc

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Passons à l'équation (4) que nous allons résoudre pour $\nu = m^2$. En posant $\cos\theta = x$, l'équation (4) se réduit à une équation généralisée du type hypergéométrique (voir § 1)

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right] + \left(\mu - \frac{m^2}{1-x^2}\right)\Theta = 0 \tag{5}$$

pour laquelle $\sigma(x) = 1 - x^2$, $\tilde{\tau}(x) = -2x$, $\tilde{\sigma}(x) = \mu(1 - x^2) - m^2$.

Le problème de recherche de la solution bornée de l'équation (5) sur l'intervalle $]-1, 1[$ appartient au type des problèmes de valeurs propres qui ont été étudiés au § 9, puisqu'on a dans le cas considéré $\sigma(x)|_{x=\pm 1} = 0$ et $\tilde{\rho}(x) = 1$. Appliquant au problème proposé la méthode du § 9, réduisons l'équation (5) à une équation du type hypergéométrique (voir § 1) en posant $\Theta(x) = \varphi(x)\, y(x)$, où $\varphi(x)$ est solution de l'équation différentielle $\varphi'/\varphi = \pi(x)/\sigma(x)$, dans laquelle $\pi(x)$ est un polynôme de degré non supérieur à 1. Pour $\pi(x)$ on a l'expression

$$\pi(x) = \pm\sqrt{k(1-x^2) + m^2 - \mu(1-x^2)}.$$

La constante $k$ sera choisie de façon que le radicande admette des racines multiples. Le polynôme $\pi(x)$ se présente donc sous l'une

des formes suivantes:

$$\pi(x) = \begin{cases} \pm m & \text{quand} \quad k = \mu, \\ \pm mx & \text{quand} \quad k = \mu - m^2, \end{cases}$$

dont on choisira celle pour laquelle la fonction

$$\tau(x) = \tilde{\tau}(x) + 2\pi(x)$$

admet une dérivée négative et une racine sur l'intervalle ]—1, 1[. Pour $m \geqslant 0$, ces conditions sont satisfaites par la fonction

$$\tau(x) = -2(m+1)x,$$

ce qui correspond à

$$\pi(x) = -mx \qquad \varphi(x) = (1-x^2)^{m/2},$$

$$\lambda = \mu - m(m+1), \qquad \rho(x) = (1-x^2)^m.$$

Les valeurs propres $\mu$ se cherchent à l'aide de l'équation

$$\lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' = 0;$$

il vient $\mu = \mu_n = l(l+1)$, où $l = n + m$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Les fonctions $y_n(x)$ s'écriront alors comme suit:

$$y_n(x) = \frac{B_{nm}}{(1-x^2)^m} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^{n+m}];$$

elles se confondent, à un facteur près, avec les polynômes de Jacobi $P_n^{(m,m)}(x)$. Puisque $n = l - m$, où $l$ est un nombre entier tel que $l \geqslant m$, on a pour $m \geqslant 0$

$$\Theta(x) \equiv \Theta_{lm}(x) = C_{lm}(1-x^2)^{m/2} P_{l-m}^{(m,m)}(x). \tag{6}$$

Ici $C_{lm}$ est une constante de normalisation. Il est évident que les fonctions $\Theta_{lm}(x)$ vérifient les conditions d'orthogonalité qui découlent des propriétés d'orthogonalité des polynômes de Jacobi:

$$\int_{-1}^{1} \Theta_{lm}(x)\Theta_{l'm}(x)\,dx = A_{lm}\delta_{ll'},$$

où

$$A_{lm} = C_{lm}^2 \int_{-1}^{1} [P_{l-m}^{(m,m)}(x)]^2 (1-x^2)^m\,dx.$$

Il est commode de poser $A_{lm} = 1$; il vient alors *)

$$C_{lm} = \frac{1}{2^m l!} \sqrt{\frac{2l+1}{2}(l-m)!(l+m)!}.$$

*) Le choix du signe de la constante $C_{lm}$ n'est pas univoque. Nous adoptons la normalisation de [2].

Citons quelques expressions de la fonction $\Theta_{lm}(x)$ pour $m \geqslant 0$ qui découlent des propriétés des polynômes de Jacobi. De la formule de dérivation pour les polynômes de Jacobi (voir § 5)

$$\frac{dP_n^{(\alpha,\beta)}}{dx} = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)\, P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)$$

il découle que

$$P_{l-m}^{(m,m)}(x) = \frac{2^m l!}{(l+m)!} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x),$$

où $P_l(x) = P_l^{(0,0)}(x)$ est un polynôme de Legendre.

On a donc pour $m \geqslant 0$

$$\Theta_{lm}(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\, P_l^m(x),$$

où

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m}$$

est ce qu'on appelle *fonction de Legendre associée de* 1re *espèce*.

Pour mettre les fonctions $\Theta_{lm}(x)$ sous forme explicite, nous ferons intervenir les formules de Rodrigues pour $P_l(x)$ et $P_{l-m}^{(m,m)}(x)$ :

$$\Theta_{lm}(x) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,(1-x^2)^{m/2} \times \\ \times \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(1-x^2)^l, \tag{7}$$

$$\Theta_{lm}(x) = \frac{(-1)^{l-m}}{2^l l!} \sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \times \\ \times (1-x^2)^{-m/2} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}(1-x^2)^l. \tag{8}$$

Voyons ce que deviennent les fonctions $\Theta_{lm}(x)$ pour $m < 0$. Les relations (7), (8) montrent que

$$\Theta_{l,-m}(x) = (-1)^m \Theta_{lm}(x). \tag{9}$$

Nous voyons donc que pour $m < 0$ les fonctions $\Theta_{lm}(x)$ restent comme précédemment solutions de l'équation (5). Ainsi donc, l'équation (2) admet pour $\mu = l(l+1)$ des solutions univoques bornées

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \Theta_{lm}(\cos\theta) \quad (-l \leqslant m \leqslant l). \tag{10}$$

Les fonctions $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ sont appelées *fonctions sphériques d'ordre l*.

Citons les expressions explicites de quelques fonctions sphériques élémentaires:

$$Y_{l0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\, P_l(\cos\theta), \tag{11}$$

$$Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta, \tag{12}$$

$$Y_{1,\pm 1}(\theta, \varphi) = \pm \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta\, e^{\pm i\varphi}.$$

On s'assure aisément que les fonctions $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ vérifient les relations d'orthogonalité

$$\int\limits_{\Omega} Y_{lm}(\theta, \varphi) Y^*_{l'm'}(\theta, \varphi)\, d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'}, \tag{13}$$

où

$$d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi).$$

Il ressort des formules (9) et (10) que

$$Y^*_{lm}(\theta, \varphi) = \Theta_{lm}(\cos\theta)\, \Phi_{-m}(\varphi) = (-1)^m Y_{l,-m}(\theta, \varphi). \tag{14}$$

Nous obtenons donc sous forme explicite les fonctions $Y(\theta, \varphi)$ qui définissent la solution bornée $u = R(r)\, Y(\theta, \varphi)$ de l'équation de Laplace en fonction des angles.

Pour définir la fonction $R(r)$, nous tirons de (1) l'équation d'Euler

$$r^2 R'' + 2rR' - l(l+1) R = 0$$

dont la solution générale s'écrit

$$R(r) = C_1 r^l + C_2 r^{-l-1}$$

($C_1$, $C_2$ sont des constantes). Ainsi donc, l'équation de Laplace admet comme solutions particulières les fonctions $r^l Y_{lm}(\theta, \varphi)$ et $\frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi)$, dont les premières sont utilisées pour la résolution de problèmes aux limites intérieurs, et les seconds, pour la résolution de problèmes aux limites extérieurs dans un domaine sphérique. Ces fonctions sont appelées *fonctions sphériques de volume.*

*Remarque.* Il existe une autre approche de l'étude des fonctions sphériques, basée sur les représentations du groupe de rotation, voir par ex. [6]. Cette approche est adoptée notamment en théorie générale du moment de la quantité de mouvement en mécanique quantique.

**2. Propriétés des fonctions sphériques.** Dégageons quelques propriétés des fonctions $Y_{lm}(\theta, \varphi)$.

1) De la formule de récurrence pour les polynômes de Jacobi et de la relation liant les fonctions $\Theta_{lm}(x)$ aux polynômes de Jacobi $P_{l-m}^{(m,m)}(x)$, on déduit sans peine la *relation de récurrence* pour la fonction $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ par rapport à l'indice $l$:

$$\cos\theta\cdot Y_{lm}=\sqrt{\frac{(l+1)^2-m^2}{4(l+1)^2-1}}\,Y_{l+1,\,m}+\sqrt{\frac{l^2-m^2}{4l^2-1}}\,Y_{l-1,\,m}.$$

La formule obtenue est valable pour $m<0$, ce qui se vérifie sans peine à l'aide de (14).

2) En dérivant (7), on obtient la formule de dérivation

$$\frac{d\Theta_{lm}}{dx}=-\frac{mx}{1-x^2}\Theta_{lm}+\sqrt{\frac{l(l+1)-m(m+1)}{1-x^2}}\,\Theta_{l,\,m+1}.$$

En changeant $m$ en $-m$ et en utilisant (9), on obtient une autre formule de dérivation:

$$\frac{d\Theta_{lm}}{dx}=\frac{mx}{1-x^2}\Theta_{lm}-\sqrt{\frac{l(l+1)-m(m-1)}{1-x^2}}\,\Theta_{l,\,m-1}.$$

On posera dans ces formules $\Theta_{lm}(x)=0$ pour $m=\pm(l+1)$.

Eliminant entre ces formules de dérivation la fonction $\frac{d\Theta_{lm}}{dx}$, on aboutit à la relation de récurrence pour la fonction $\Theta_{lm}(x)$ par rapport à l'indice $m$:

$$\frac{2mx}{\sqrt{1-x^2}}\Theta_{lm}=[\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}\,\Theta_{l,\,m+1}-$$
$$-\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\,\Theta_{l,\,m-1}].$$

A l'aide de (10), on obtient les *formules de dérivation pour les fonctions sphériques*. Puisque

$$\frac{\partial Y_{lm}(\theta,\ \varphi)}{\partial\theta}=-\sin\theta\,\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{d\Theta_{lm}(x)}{dx}\Bigg|_{x=\cos\theta},$$

les formules de dérivation pour $\Theta_{lm}(x)$ se laissent récrire sous la forme

$$e^{\pm i\varphi}\left(\mp\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta}+m\operatorname{cotg}\theta\cdot Y_{lm}\right)=$$
$$=\sqrt{l(l+1)-m(m\pm1)}\,Y_{l,\,m\pm1}. \qquad (15)$$

On posera dans ces formules $Y_{lm}(\theta,\ \varphi)=0$ pour $m=\pm(l+1)$.

De la forme explicite des fonctions sphériques on déduit également la *formule de dérivation* suivante:

$$\frac{\partial Y_{lm}(\theta,\ \varphi)}{\partial\varphi}=imY_{lm}(\theta,\ \varphi). \qquad (16)$$

3) Déduisons la *représentation intégrale* pour la fonction $Y_{lm}(\theta, \varphi)$. A cet effet, représentons dans l'expression (7) de $\Theta_{lm}(x)$ la fonction $\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(1-x^2)^l$ à l'aide de la formule intégrale de Cauchy:

$$\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(1-x^2)^l = \frac{(l+m)!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{(1-s^2)^l}{(s-x)^{l+m+1}}\,ds$$

($C$ est un contour entourant le point $s = x$). Il est commode de choisir comme $C$ une circonférence de centre en $s = x$ de rayon $\sqrt{1-x^2}$. Alors, en posant $s = x + \sqrt{1-x^2}e^{i\alpha}$, on obtient

$$\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(1-x^2)^l =$$

$$= \frac{(-2)^l (l+m)!}{2\pi}(1-x^2)^{-m/2}\int\limits_0^{2\pi} e^{-im\alpha}\left(x+i\sqrt{1-x^2}\sin\alpha\right)^l d\alpha.$$

En substituant l'expression obtenue dans (7) et en utilisant (10), on obtient la représentation intégrale pour $Y_{lm}(\theta, \varphi)$:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = B_{lm}\int\limits_0^{2\pi} e^{-im(\alpha-\varphi)}(\cos\theta + i\sin\theta\sin\alpha)^l\,d\alpha =$$

$$= B_{lm}\int\limits_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} e^{-im\alpha}[\cos\theta + i\sin\theta\sin(\alpha+\varphi)]^l\,d\alpha,$$

où

$$B_{lm} = \frac{1}{4\pi\, l!}\sqrt{\frac{2l+1}{\pi}(l-m)!\,(l+m)!}\,.$$

Puisque l'intégrale d'une fonction périodique le long d'un segment dont la longueur est égale à la période de la fonction ne dépend pas de la position du segment, on a

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = B_{lm}\int\limits_0^{2\pi} e^{-im\alpha}[\cos\theta + i\sin\theta\sin(\alpha+\varphi)]^l\,d\alpha. \qquad (17)$$

**3. Relation entre les polynômes harmoniques homogènes et les fonctions sphériques.** En résolvant l'équation de Laplace $\Delta u = 0$ en coordonnées sphériques, nous avons trouvé les solutions particulières de cette équation qui sont bornées pour $r \to 0$:

$$u_{lm}(r, \theta, \varphi) = r^l Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

A l'aide de la représentation intégrale (17), on peut exprimer les fonctions $u_{lm}(r, \theta, \varphi)$ en coordonnées cartésiennes

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta.$$

On a

$$u_{lm}(r,\ \theta,\ \varphi)=B_{lm}\int_0^{2\pi} e^{-im\alpha}\,[r\cos\theta+ir\sin\theta\sin(\alpha+\varphi)]^l\,d\alpha=$$

$$=B_{lm}\int_0^{2\pi} e^{-im\alpha}\,(z+ix\sin\alpha+iy\cos\alpha)^l\,du.$$

On voit que la fonction $u_{lm}(r,\ \theta,\ \varphi)$ est un polynôme homogène de degré $l$ en $x$, $y$, $z$.

Rappelons qu'on entend par *polynôme homogène de degré* $l$ une expression de la forme

$$u_l(x,\ y,\ z)=\sum_{l_1,\,l_2,\,l_3} C_{l_1l_2l_3}x^{l_1}y^{l_2}z^{l_3}$$

dans laquelle la sommation se fait suivant tous les indices non négatifs $l_1\geqslant 0$, $l_2\geqslant 0$, $l_3\geqslant 0$ dont la somme est égale à $l$. A ce titre, l'expression $r^2=x^2+y^2+z^2$ est un polynôme homogène.

Calculons le nombre des polynômes homogènes de degré $l$ linéairement indépendants. A cet effet, il suffit de recenser toutes les combinaisons possibles des valeurs de $l_1$ et de $l_2$, car, pour un $l$ donné, la valeur de $l_3$ se définit sans ambiguïté: $l_3=l-l_1-l_2$. Si $l_1$ est donné, la valeur de $l_2$ peut varier entre $l_2=0$ et $l_2=l-l_1$, autrement dit, il existe $l-l_1+1$ valeurs possibles de $l_2$. Aussi le nombre total des polynômes homogènes de degré $l$ linéairement indépendants est-il égal à

$$N_1=\sum_{l_1=0}^{l}(l-l_1+1)=\frac{(l+1)\,(l+2)}{2}.$$

Un polynôme homogène vérifiant l'équation de Laplace est dit *polynôme harmonique homogène*. L'expression $r^lY_{lm}(\theta,\ \varphi)$ en est un exemple.

On peut former, à partir des polynômes homogènes $r^2$ et $r^{l-2n}Y_{l-2n,m}(\theta,\ \varphi)$, des polynômes homogènes de degré $l$:

$$u_{lmn}(x,\ y,\ z)=(r^2)^nr^{l-2n}\,Y_{l-2n,m}(\theta,\ \varphi)=r^lY_{l-2n,m}(\theta,\ \varphi).$$

Les indices $m$, $n$ peuvent prendre des valeurs entières vérifiant les inégalités

$$0\leqslant 2n\leqslant l,\qquad -(l-2n)\leqslant m\leqslant l-2n.$$

En vertu de l'indépendance linéaire des fonctions sphériques $Y_{l-2n,m}(\theta,\ \varphi)$, qui découle de leur orthogonalité, les polynômes homogènes $u_{lmn}(x,\ y,\ z)$ seront linéairement indépendants. Pour une valeur donnée de $l-2n$, le nombre des valeurs possibles de $m$ est $2(l-2n)+1$. Aussi le nombre total des polynômes homogènes

considérés est-il égal à

$$\sum_n [2(l-2n)+1] = \frac{(l+1)(l+2)}{2}.$$

Remarquant que le nombre des polynômes homogènes que nous venons de considérer est égal au nombre total des polynômes homogènes de degré $l$ linéairement indépendants, un polynôme homogène arbitraire de degré $l$ se laisse représenter sous forme d'une combinaison linéaire de polynômes homogènes $r^l Y_{l-2n,m}(\theta, \varphi)$, i. e.

$$u_l(x, y, z) = r^l \sum_{m,n} C_{mn} Y_{l-2n,m}(\theta, \varphi). \tag{18}$$

Nous avons obtenu le développement d'un polynôme homogène arbitraire suivant les fonctions sphériques. A l'aide du développement (18), on montre sans peine que *tout polynôme harmonique homogène de degré $l$ est une combinaison linéaire de polynômes harmoniques homogènes $r^l Y_{lm}(\theta, \varphi)$.*

Soit en effet $u_l(x, y, z)$ un polynôme harmonique homogène, en sorte que $\Delta u_l = 0$. Alors, en appliquant l'opérateur de Laplace $\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}$ au développement (18), on obtient

$$\Delta u_l = r^{l-2} \sum_{m,n} [l(l+1)-(l-2n)(l-2n+1)] C_{mn} Y_{l-2n,m}(\theta, \varphi) =$$

$$= r^{l-2} \sum_{m,n} 2n(2l-2n+1) C_{mn} Y_{l-2n,m}(\theta, \varphi) = 0.$$

Puisque les fonctions sphériques $Y_{l-2n,m}(\theta, \varphi)$ sont linéairement indépendantes, on obtient l'égalité

$$2n(2l-2n+1) C_{mn} = 0,$$

i. e. $C_{mn} = 0$ pour $n > 0$, ce qu'il fallait démontrer.

**4. Fonctions sphériques généralisées.** Lorsqu'on fait tourner le système de coordonnées, un polynôme homogène se transforme en un polynôme homogène de même degré. D'autre part, l'opérateur de Laplace reste inchangé dans une telle rotation, i. e. $\Delta_{xyz} = \Delta_{x'y'z'}$. C'est pourquoi, quand on fait tourner le système de coordonnées, tout polynôme harmonique homogène se transforme en un polynôme harmonique homogène de même degré. D'où

$$u_{lm}(x, y, z) = \sum_{m'} D^l_{mm'} u_{lm'}(x', y', z'),$$

où

$$u_{lm}(x, y, z) = r^l Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

Il vient donc

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{m'} D^l_{mm'} Y_{lm'}(\theta', \varphi'). \tag{19}$$

Les combinaisons linéaires de fonctions $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ pour un $l$ donné forment donc un espace de fonctions à $2l + 1$ dimensions qui est invariant par rotation.

Les coefficients $D^l_{mm'}$ dépendront évidemment des paramètres qui définissent la rotation du système de coordonnées. Une rotation quelconque du système de coordonnées par rapport à l'origine des coordonnées se définit sans ambiguïté par trois paramètres réels. En effet, on définit une rotation de façon univoque en donnant le sens de rotation de l'axe (deux paramètres) et l'angle de rotation (un paramètre). Comme paramètres définissant une rotation, on utilise le plus souvent les *angles d'Euler* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, si bien que n'importe quelle rotation se fait en opérant trois rotations consécutives autour des axes de coordonnées: a) une rotation de l'angle $\alpha$ autour de l'axe des $z$; b) une rotation de l'angle $\beta$ autour du nouvel axe des $y$; c) une rotation de l'angle $\gamma$ autour du nouvel axe des $z$ *). On a donc

$$D^l_{mm'} = D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma).$$

Dans le texte qui suit, la matrice d'éléments $D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma)$ sera notée $D(\alpha, \beta, \gamma)$ et appelée *matrice des rotations finies.*

Une rotation quelconque se définit d'une façon univoque par les angles d'Euler si ceux-ci varient dans les limites suivantes: $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \gamma < 2\pi$. Lorsqu'il s'agit d'une rotation d'angles $(\alpha + 2\pi n_1, \beta + 2\pi n_2, \gamma + 2\pi n_3)$, elle se confond avec la rotation d'angles $(\alpha, \beta, \gamma)$ si $n_1$, $n_2$, $n_3$ sont des nombres entiers. On a donc

$$D(\alpha + 2\pi n_1, \beta + 2\pi n_2, \gamma + 2\pi n_3) = D(\alpha, \beta, \gamma).$$

Remarquons en outre que la rotation $(\alpha, \beta, \gamma)$ est équivalente à la rotation $(\pi + \alpha, -\beta, \pi + \gamma)$. La rotation inverse se caractérisera par des angles

$$\alpha_1 = -\gamma, \quad \beta_1 = -\beta, \quad \gamma_1 = -\alpha,$$

ce qui équivaut à la rotation

$$(\pi + \alpha_1, -\beta_1, \pi + \gamma_1) = (\pi - \gamma, \beta, \pi - \alpha).$$

La matrice de la rotation inverse se confond donc avec la matrice de la rotation $(\pi - \gamma, \beta, \pi - \alpha)$, i. e.

$$D^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) = D(\pi - \gamma, \beta, \pi - \alpha).$$

Les fonctions $D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma)$ sont appelées *fonctions sphériques généralisées*, car elles se confondent dans un certain nombre de cas

*) Parfois la rotation de l'angle $\beta$ se fait non pas autour du nouvel axe des $y$ mais autour du nouvel axe des $x$. Les angles d'Euler $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ introduits de cette façon sont liés aux angles d'Euler $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ par les relations $\alpha' = \alpha + \pi/2$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma - \pi/2$.

particuliers avec les fonctions sphériques ordinaires. On les appelle également *D-fonctions de Wigner*. Les fonctions sphériques généralisées sont largement utilisées en mécanique quantique.

Dégageons quelques propriétés principales des fonctions sphériques généralisées et mettons-les sous forme explicite en fonction des paramètres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Puisque l'élément d'angle solide est invariant par rotation, $d\Omega = d\Omega'$, les conditions d'orthogonalité

$$\int Y_{lm}(\theta, \varphi) Y^*_{lm_1}(\theta, \varphi)\, d\Omega = \delta_{mm_1},$$

$$\int Y_{lm'}(\theta', \varphi') Y^*_{lm'_1}(\theta', \varphi')\, d\Omega' = \delta_{m'm'_1}$$

donnent lieu à la relation

$$\sum_{m'} D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma) [D^l_{m_1m'}(\alpha, \beta, \gamma)]^* = \delta_{mm_1}, \tag{20}$$

i. e. la matrice $D^+(\alpha, \beta, \gamma)$, qui est la transposée et la conjuguée complexe de $D(\alpha, \beta, \gamma)$, se confond avec $D^{-1}(\alpha, \beta, \gamma)$. Cela revient à dire que la matrice $D(\alpha, \beta, \gamma)$ est unitaire. On obtient donc à partir de (19)

$$Y_{lm'}(\theta', \varphi') = \sum_m [D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma)]^* Y_{lm}(\theta, \varphi). \tag{19a}$$

En faisant intervenir les égalités $D^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) = D(\pi - \gamma, \beta, \pi - \alpha)$, $D^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) = D^+(\alpha, \beta, \gamma)$ on aboutit à la relation suivante:

$$D^l_{mm'}(\pi - \gamma, \beta, \pi - \alpha) = [D^l_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma)]^*. \tag{21}$$

Une autre propriété élémentaire des fonctions sphériques généralisées se déduit facilement de la propriété (14) des fonctions sphériques $Y_{lm}(\theta, \varphi)$:

$$D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma) = (-1)^{m-m'} [D^l_{-m,\,-m'}(\alpha, \beta, \gamma)]^*. \tag{22}$$

Essayons de mettre les fonctions sphériques généralisées $D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma)$ sous forme explicite. Soient deux rotations consécutives de paramètres $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ et $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$ équivalentes à une rotation unique de paramètres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, et cela en sorte qu'à la suite de la première rotation les coordonnées sphériques $(\theta, \varphi)$ d'un vecteur fixe changent en coordonnées sphériques $(\theta_1, \varphi_1)$, tandis qu'à la suite de la seconde rotation les coordonnées $\theta_1$, $\varphi_1$ changent en $\theta'$, $\varphi'$. On a alors

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{m_1} D^l_{mm_1}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) Y_{lm_1}(\theta_1, \varphi_1),$$

$$Y_{lm_1}(\theta_1, \varphi_1) = \sum_{m_1} D^l_{m_1m'}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) Y_{lm'}(\theta', \varphi').$$

D'autre part,

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{m'} D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma)\, Y_{lm'}(\theta', \varphi').$$

En vertu de l'indépendance linéaire des fonctions sphériques, la confrontation des développements précédents conduit à l'égalité

$$D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{m_1} D^l_{mm_1}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\, D^l_{m_1m'}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2),$$

ou

$$D(\alpha, \beta, \gamma) = D(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\, D(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2),$$

i. e. les matrices de deux rotations consécutives se multiplient dans l'ordre inverse. Une relation analogue a lieu quand on effectue plusieurs rotations consécutives du système de coordonnées. De là et de la définition des angles d'Euler il résulte que pour calculer les fonctions sphériques généralisées $D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma)$, il suffit de connaître leurs expressions dans les cas où les rotations s'opèrent autour de l'axe des $z$ et autour de celui des $y$. Désignons par $C^l_{mm'}(\alpha)$ et $d^l_{mm'}(\beta)$ les fonctions sphériques généralisées qui correspondent à la rotation de l'angle $\alpha$ autour de l'axe des $z$ et de l'angle $\beta$ autour de l'axe des $y$. Il vient alors

$$D^l_{mm}(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{m_1m_2} C^l_{mm_1}(\alpha)\, d^l_{m_1m_2}(\beta)\, C^l_{m_2m'}(\gamma).$$

Cherchons la forme explicite des fonctions $C^l_{mm'}(\alpha)$. Quand on opère la rotation de l'angle $\alpha$ autour de l'axe des $z$, les coordonnées sphériques $\theta$, $\varphi$ d'un vecteur fixe se transforment en coordonnées sphériques $\theta' = \theta$, $\varphi' = \varphi - \alpha$. On a donc

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = Y_{lm}(\theta', \varphi' + \alpha) = e^{im\alpha}\, Y_{lm}(\theta', \varphi').$$

D'autre part,

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{m'} C^l_{mm'}(\alpha)\, Y_{lm'}(\theta', \varphi').$$

D'où

$$C^l_{mm'}(\alpha) = e^{im\alpha}\delta_{mm'}$$

et donc

$$D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{i(m\alpha + m'\gamma)} d^l_{mm'}(\beta). \qquad (23$$

Cherchons maintenant les fonctions sphériques généralisées $d^l_{mm'}(\beta)$ qui correspondent à la rotation du système de coordonnées de l'angle $\beta$ autour de l'axe des $y$. On a dans ce cas

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{m'} d^l_{mm'}(\beta)\, Y_{lm'}(\theta', \varphi'). \qquad (24$$

Les nouvelles coordonnées $(x', y', z')$ sont liées aux anciennes $(x, y, z)$ par les relations

$$x = x' \cos\beta + z' \sin\beta,$$
$$y = y',$$
$$z = z' \cos\beta - x' \sin\beta.$$

En passant aux coordonnées sphériques, établissons la relation entre $(\theta, \varphi)$ et $(\theta', \varphi')$:

$$\begin{aligned} \sin\theta\cos\varphi &= \sin\theta'\cos\varphi'\cos\beta + \cos\theta'\sin\beta, \\ \sin\theta\sin\varphi &= \sin\theta'\sin\varphi', \\ \cos\theta &= \cos\theta'\cos\beta - \sin\theta'\cos\varphi'\sin\beta. \end{aligned} \tag{25}$$

Pour déterminer $d^l_{mm'}(\beta)$, cherchons les relations différentielles entre ces fonctions. Puisque, dans le second membre de (24), la dérivation se fait le plus facilement par rapport à $\beta$ et $\varphi'$, nous fixerons la valeur de $\theta'$ dans cette relation et considérerons les variables $\theta$ et $\varphi$ comme des fonctions des variables $\beta$ et $\varphi'$. Il vient donc

$$\frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial\beta} = \frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\beta} + \frac{\partial Y_{lm}}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta},$$
$$\frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial\varphi'} = \frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi'} + \frac{\partial Y_{lm}}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi'}.$$

Les dérivées $\frac{\partial\theta}{\partial\beta}$, $\frac{\partial\theta}{\partial\varphi'}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi'}$ seront calculées à l'aide des relations (25). Dérivons la dernière de ces relations, il vient

$$\frac{\partial\theta}{\partial\beta} = \cos\varphi, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial\varphi'} = -\sin\beta\sin\varphi.$$

En dérivant la deuxième et la première des relations (25) respectivement on trouve

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = -\operatorname{cotg}\theta\sin\varphi,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi'} = -\sin\beta\operatorname{cotg}\theta\cos\varphi + \cos\beta.$$

D'où

$$\frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial\beta} = \cos\varphi\frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial\theta} - im\operatorname{cotg}\theta\sin\varphi Y_{lm}(\theta, \varphi),$$
$$\frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial\varphi'} = -\sin\beta\left[\sin\varphi\frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial\theta} + \right.$$
$$\left. + im\operatorname{cotg}\theta\cos\varphi Y_{lm}(\theta, \varphi)\right] + im\cos\beta Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

Pour le calcul de la dérivée $\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)/\partial\theta$, nous utiliserons les formules de dérivation (15). Puisque dans (15) figurent les quantités $e^{\pm i\varphi}\partial Y_{lm}/\partial\theta$ et dans les expressions de $\partial Y_{lm}/\partial\beta$ et de $\partial Y_{lm}/\partial\varphi'$ les quantités $\cos\varphi\cdot\partial Y_{lm}/\partial\theta$ et $\sin\varphi\cdot\partial Y_{lm}/\partial\theta$, on doit, pour pouvoir appliquer les formules (15), écrire d'abord les combinaisons linéaires correspondantes de $\partial Y_{lm}/\partial\beta$ et de $\partial Y_{lm}/\partial\varphi'$. On a

$$\frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial\beta} \mp \frac{i}{\sin\beta}\frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial\varphi'} =$$

$$= e^{\pm i\varphi}\left[\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta} \mp m \operatorname{cotg}\theta Y_{lm}\right] \pm m \operatorname{cotg}\beta Y_{lm} =$$

$$= \mp\sqrt{l(l+1)-m(m\pm 1)}\, Y_{l,\, m\pm 1}(\theta, \varphi) \pm m \operatorname{cotg}\beta Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

En utilisant le développement (24) des quantités $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, $Y_{l,m\pm 1}(\theta, \varphi)$ et en identifiant les coefficients de $Y_{lm'}(\theta', \varphi')$ dans les premier et second membres de l'égalité, on obtient les relations différentielles cherchées pour la fonction $d^l_{mm'}(\beta)$:

$$\frac{d}{d\beta} d^l_{mm'} \pm \frac{m' - m\cos\beta}{\sin\beta} d^l_{mm'} =$$

$$= \mp\sqrt{l(l+1)-m(m\pm 1)}\, d^l_{m\pm 1,\, m'}. \tag{26}$$

On posera ici $d^l_{\pm(l+1),\, m'}(\beta) = 0$. A l'aide des relations (26) et de la condition $d^l_{mm'}(0) = \delta_{mm'}$, qui découle de (24) pour $\beta = 0$, on définit toutes les fonctions $d^l_{mm'}(\beta)$ de façon univoque.

Mettons la relation (26) sous une forme plus condensée. A cet effet, nous la multiplierons par

$$\exp\left(\pm\int\frac{m' - m\cos\beta}{\sin\beta}d\beta\right) = (1-\cos\beta)^{\pm\frac{m'-m}{2}}(1+\cos\beta)^{\mp\frac{m'+m}{2}},$$

ce qui nous donnera

$$\frac{d}{d\beta}\left[(1-\cos\beta)^{\pm\frac{m'-m}{2}}(1+\cos\beta)^{\mp\frac{m'+m}{2}} d^l_{mm'}(\beta)\right] =$$

$$= \mp\sqrt{l(l+1)-m(m\pm 1)}\,(1-\cos\beta)^{\pm\frac{m'-m}{2}} \times$$

$$\times (1+\cos\beta)^{\mp\frac{m'+m}{2}} d^l_{m\pm 1,\, m'}(\beta). \tag{27}$$

Choisissons dans (27) les signes en position supérieure et posons $m = l$, il vient

$$(1-\cos\beta)^{\frac{m'-l}{2}}(1+\cos\beta)^{-\frac{m'+l}{2}} d^l_{lm'}(\beta) = \text{const.}$$

D'où

$$d^l_{lm'}(\beta) = C_{lm'}(1-\cos\beta)^{\frac{l-m'}{2}}(1+\cos\beta)^{\frac{l+m'}{2}}$$

($C_{lm'}$ est une constante). Pour $m < l$ les fonctions $d^l_{mm'}(\beta)$ se laissent exprimer par une formule de récurrence à l'aide de $d^l_{lm'}(\beta)$ en prenant dans (27) les signes en position inférieure. En faisant le changement de variables

$$x = \cos\beta, \quad v_{mm'}(x) = (1-x)^{\frac{m-m'}{2}} (1+x)^{\frac{m+m'}{2}} d^l_{mm'}(\beta),$$

on obtient

$$v_{m-1,\, m'} = -\frac{1}{\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}} \frac{dv_{mm'}}{dx},$$

d'où

$$v_{mm'} = (-1)^{l-m} \prod_{s=m+1}^{l} \frac{1}{\sqrt{l(l+1)-s(s-1)}} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} v_{lm'},$$

i.e.

$$d^l_{mm'}(\beta) = C_{lm'} \frac{(-1)^{l-m}(1-x)^{\frac{m'-m}{2}}(1+x)^{-\frac{m'+m}{2}}}{\prod_{s=m+1}^{l} \sqrt{l(l+1)-s(s-1)}} \times$$

$$\times \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} [(1-x)^{l-m'}(1+x)^{l+m'}]. \quad (28)$$

Pour déterminer la constante $C_{lm'}$, nous utiliserons l'égalité $d^l_{m'm'}(0) = 1$. En faisant dans (28) la dérivation d'après la formule de Leibniz, nous obtenons

$$d^l_{m'm'}(0) = C_{lm'} \frac{2^{-m'} 2^{l+m'} (l-m')!}{\prod_{s=m'+1}^{l} \sqrt{l(l+1)-s(s-1)}} = 1,$$

d'où

$$C_{lm'} = \frac{\prod_{s=m'+1}^{l} \sqrt{l(l+1)-s(s-1)}}{2^l (l-m')!}.$$

Puisque

$$\prod_{s=m+1}^{l} [l(l+1)-s(s-1)] = \prod_{s=m+1}^{l} (l+s)(l-s+1) = \frac{(2l)!\,(l-m)!}{(l+m)!},$$

on obtient finalement

$$d^l_{mm'}(\beta) = \frac{(-1)^{l-m}}{2^l (l-m)!} \sqrt{\frac{(l+m)!\,(l-m)!}{(l+m')!\,(l-m')!}} (1-x)^{\frac{m'-m}{2}} \times$$
$$\times (1+x)^{-\frac{m'+m}{2}} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} [(1-x)^{l-m'} (1+x)^{l+m'}]. \quad (29)$$

Remarquons que les fonctions $d^l_{mm'}(\beta)$ sont réelles. Elles se laissent exprimer à l'aide des polynômes de Jacobi:

$$d^l_{mm'}(\beta) = \frac{1}{2^m} \sqrt{\frac{(l+m)!\,(l-m)!}{(l+m')!\,(l-m')!}} (1-x)^{\frac{m-m'}{2}} \times$$
$$\times (1+x)^{\frac{m+m'}{2}} P^{(m-m',\, m+m')}_{l-m}(x),$$

où $x = \cos\beta$. Les fonctions $d^l_{mm'}(\beta)$ peuvent s'écrire sous une forme différente, en faisant intervenir les relations de symétrie qui résultent de (21), (22), (23) et du caractère réel des fonctions $d^l_{mm'}(\beta)$:

$$d^l_{mm'} = (-1)^{m-m'} d^l_{m'm}, \quad d^l_{mm'} = (-1)^{m-m'} d^l_{-m,\,-m'}. \quad (30)$$

En utilisant les relations (30), on peut faire en sorte que les inégalités

$$m - m' \geqslant 0, \quad m + m' \geqslant 0$$

soient toujours vérifiées.

En confrontant la formule (29) pour $m' = 0$ et la formule (8), on obtient

$$d^l_{m0}(\beta) = \sqrt{\frac{2}{2l+1}}\, \Theta_{lm}(x),$$

d'où

$$D^l_{m0}(\alpha, \beta, \gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, Y_{lm}(\beta, \alpha), \quad (31)$$
$$D^l_{00}(\alpha, \beta, \gamma) = P_l(\cos\beta).$$

A l'aide de (21), on obtient une autre relation analogue:

$$D^l_{0m}(\alpha, \beta, \gamma) = (-1)^m \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, Y_{lm}(\beta, \gamma).$$

**5. Théorème d'addition.** Etablissons pour les fonctions sphériques une relation très utile, appelée théorème d'addition. A cet effet, posons dans (19a) $m' = 0$ et appliquons les formules (11) et (31):

$$P_l(\cos\theta') = \frac{4}{2l+1} \sum_m Y_{lm}(\theta, \varphi)\, Y^*_{lm}(\beta, \alpha). \quad (32)$$

La relation (32) admet une interprétation géométrique bien simple. Soient deux vecteurs quelconques $r_1$, $r_2$ dont les directions se définissent par des coordonnées sphériques $(\theta_1, \varphi_1)$ et $(\theta_2, \varphi_2)$. Soit $\omega$ l'angle que font ces directions entre elles. Posons dans (32) $\theta = \theta_1$, $\varphi = \varphi_1$ et faisons une rotation $(\alpha, \beta, \gamma)$ de telle façon que la direction du nouvel axe des $z$ vienne se confondre avec celle du vecteur $\boldsymbol{r}_2$. De toute évidence, les angles $\alpha$ et $\beta$ seront les angles sphériques du nouvel axe des $z$ dans le système de coordonnées ancien. Il est facile de voir alors que $\alpha = \varphi_2$, $\beta = \theta_2$ et l'angle $\omega$ entre $\boldsymbol{r}_1$ et $\boldsymbol{r}_2$ se confond avec $\theta'$. La formule (32) devient donc

$$P_l(\cos\omega) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1)\, Y^*_{lm}(\theta_2, \varphi_2). \tag{33}$$

La relation (33) est appelée *théorème d'addition pour les fonctions sphériques*. Son champ d'application est vaste, par exemple en théorie des spectres atomiques. La formule (33) est fréquemment utilisée pour développer la quantité $\frac{1}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}$ en série suivant les fonctions sphériques $Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1)$ et $Y_{lm}(\theta_2, \varphi_2)$. Puisque (voir § 5)

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\omega),$$

on obtient d'après le théorème d'addition pour les fonctions sphériques

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1)\, Y^*_{lm}(\theta_2, \varphi_2). \tag{34}$$

Ici $r_< = \min(r_1, r_2)$, $r_> = \max(r_1, r_2)$.

*Exemple 1.* Considérons le potentiel

$$u(\boldsymbol{r}) = \int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} d\tau' \tag{35}$$

créé par une charge électrique de densité $\rho(\boldsymbol{r})$ enfermée dans un volume $V$. Pour calculer le potentiel $u(\boldsymbol{r})$ à une grande distance du volume $V$, il est commode de le développer suivant les puissances de $1/r$, en choisissant l'origine des coordonnées à l'intérieur de $V$. A l'aide du développement (34) pour $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}'$, $r > r'$, l'ex-

pression (35) peut s'écrire comme suit:

$$u(r)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{Q_{lm}}{r^{l+1}}Y_{lm}(\theta,\ \varphi), \tag{36}$$

$$Q_{lm}=\frac{4\pi}{2l+1}\int\limits_V r'^l\rho(r')\,Y_{lm}(\theta',\ \varphi')\,d\tau'. \tag{37}$$

La formule (36) s'appelle généralement *développement multipolaire du potentiel.*

Si le volume $V$ est une boule de rayon $r'$, $0<r'<a$, et $\rho(r')=\rho(r')$, l'intégrale (37) est facile à calculer: $Q_{lm}=\sqrt{4\pi}Q\delta_{l0}\delta_{m0}$, où $Q$ est la charge totale. On obtient alors, comme il fallait s'y attendre, $u(r)=Q/r$.

*Exemple 2.* Appliquons le théorème d'addition (33) à la résolution du *premier problème aux limites intérieur pour l'équation de Laplace dans une boule*:

$$\Delta u=0,\qquad u(r,\ \theta,\ \varphi)\,|_{r=a}=f(\theta,\ \varphi).$$

La solution sera cherchée par séparation des variables, sous forme d'une série suivant les fonctions sphériques de volume $r^lY_{lm}(\theta,\ \varphi)$:

$$u(r,\ \theta,\ \varphi)=\sum_{l,\ m}C_{lm}\left(\frac{r}{a}\right)^lY_{lm}(\theta,\ \varphi). \tag{38}$$

Pour déterminer les coefficients $C_{lm}$, rappelons-nous que sur la sphère la condition aux limites est $r=a$ et que les fonctions sphériques $Y_{lm}(\theta,\ \varphi)$ sont orthonormées. Il vient donc

$$C_{lm}=\int f(\theta',\ \varphi')\,Y_{lm}^*(\theta',\ \varphi')\,d\Omega'.$$

La solution (38) peut s'écrire également sous forme d'une intégrale. A cet effet, substituons l'expression de $C_{lm}$ dans (38), permutons la sommation et l'intégration, puis faisons la sommation sur $m$ à l'aide du théorème d'addition:

$$u(r,\ \theta,\ \varphi)=\int d\Omega' f(\theta',\ \varphi')\left[\sum_{l,\ m}\left(\frac{r}{a}\right)^lY_{lm}(\theta,\ \varphi)\,Y_{lm}^*(\theta',\ \varphi')\right]=$$

$$=\int d\Omega' f(\theta',\ \varphi')\left[\sum_{l}\frac{2l+1}{4\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^lP_l(\mu)\right].$$

Ici $\mu$ est le cosinus de l'angle entre les directions $(\theta,\ \varphi)$ et $(\theta',\ \varphi')$:

$$\mu=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi').$$

Pour faire la sommation sur $l$, nous ferons intervenir la fonction génératrice pour les polynômes de Legendre:

$$\sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(\mu) = \frac{1}{\sqrt{1-2t\mu+t^2}}.$$

Puisque

$$\sum_l (2l+1)\, t^l P_l(\mu) = 2\sqrt{t} \sum_l \left(l+\frac{1}{2}\right) t^{l-1/2} P_l(\mu) =$$
$$= 2\sqrt{t}\frac{d}{dt}\left[\sqrt{t}\sum_l t^l P_l(\mu)\right] = 2\sqrt{t}\frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1-2t\mu+t^2}}\right) =$$
$$= \frac{1-t^2}{(1-2t\mu+t^2)^{3/2}},$$

on a

$$\sum_l (2l+1)\left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\mu) = \frac{1-(r/a)^2}{[1-2\mu r/a+(r/a)^2]^{3/2}},$$

ce qui veut dire que la solution du premier problème aux limites intérieur lorsque l'équation de Laplace se rapporte à une boule se présente sous la forme

$$u(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi}\int d\Omega' f(\theta', \varphi')\frac{1-(r/a)^2}{[1-2\mu r/a+(r/a)^2]^{3/2}}.$$

## § 11. Fonctions de deuxième espèce

**1. Représentation intégrale.** On a vu au § 3 que l'équation différentielle pour les polynômes orthogonaux classiques admet des solutions de la forme

$$y(z) = \frac{C_n}{\rho(z)}\int_C \frac{\sigma^n(s)\rho(s)}{(s-z)^{n+1}}\,ds, \tag{1}$$

où le contour $C$ d'extrémités $s_1$ et $s_2$ est choisi de façon à vérifier la condition

$$\left.\frac{\sigma^{n+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{n+2}}\right|_{s_1}^{s_2} = 0. \tag{2}$$

Dans le cas d'un contour fermé autour du point $s = z$ on a pour $C_n = \frac{B_n n!}{2\pi i}$ des polynômes classiques $y_n(z)$ orthogonaux sur l'intervalle $]a, b[$. Une autre forme possible du contour $C$ est pour $z \notin [a, b]$, un segment de droite joignant les points $s_1 = a$ et $s_2 = b$. La condition (2) a lieu en vertu de la condition (8) du § 5. La solution correspondante pour $C_n = B_n n!$ est appelée *fonction de deuxième*

*espèce* et se note $Q_n(z)$:

$$Q_n(z) = \frac{B_n n!}{\rho(z)} \int_a^b \frac{\sigma^n(s)\rho(s)}{(s-z)^{n+1}}\, ds. \tag{3}$$

La forme explicite de la fonction $\rho(z)$ (voir § 3) permet de voir aisément que cette fonction peut admettre des points de branchement pour $z = a$ et $z = b$. On doit alors, afin d'assurer l'univocité de la fonction $Q_n(z)$, faire des coupures sur le plan de la variable complexe $z$, par exemple une coupure $(a, +\infty)$ allant du point $z = a$ vers la droite le long de l'axe réel. On peut admettre alors que $\rho(x + i0) = \rho(x)$ pour $x \in (a, b)$.

En faisant $n$ fois l'intégration par parties dans (3), on obtient la représentation intégrale qui établit une relation entre $Q_n(z)$ et les polynômes $y_n(z)$:

$$Q_n(z) = \frac{B_n(n-1)!}{\rho(z)} \left\{ -\frac{\sigma^n(s)\rho(s)}{(s-z)^n}\Big|_a^b + \int_a^b \frac{\frac{d}{ds}[\sigma^n(s)\rho(s)]}{(s-z)^n}\, ds \right\} = \dots$$

$$\dots = \frac{B_n}{\rho(z)} \int_a^b \frac{\frac{d^n}{ds^n}[\sigma^n(s)\rho(s)]}{s-z}\, ds.$$

Nous avons profité du fait que le premier terme dans l'accolade s'annule en vertu de la condition (8) du § 5, car $[\sigma^n(z)\rho(z)]^{(n-m)} = \frac{1}{A_{mn}B_n} \times$ $\times\, \sigma^m(z)\rho(z) y_n^{(m)}(z)$. En utilisant la formule de Rodrigues pour les polynômes $y_n(z)$, on donne à l'égalité déduite la forme

$$Q_n(z) = \frac{1}{\rho(z)} \int_a^b \frac{y_n(s)\rho(s)}{s-z}\, ds. \tag{4}$$

La représentation intégrale (4) peut être mise sous une forme différente, qui s'avère parfois plus utile:

$$Q_n(z) = \frac{1}{\rho(z)} \left[ \int_a^b \frac{y_n(s) - y_n(z)}{s-z} \rho(s)\, ds + y_n(z) \int_a^b \frac{\rho(s)\, ds}{s-z} \right].$$

Remarquant que la première intégrale du crochet est un polynôme de deuxième espèce $r_n(z)$ (voir § 6, n° 3), et que la seconde se laisse exprimer à l'aide de la fonction $Q_0(z)$, on obtient

$$Q_n(z) = \frac{1}{\rho(z)} r_n(z) + \frac{y_n(z)}{y_0(z)} Q_0(z). \tag{5}$$

Ainsi donc, toutes les particularités de la seconde solution $Q_n(z)$ se définissent par le comportement des fonctions $Q_0(z)$ et $1/\rho(z)$.

**2. Représentation asymptotique.** A l'aide de (4), on déduit la *représentation asymptotique* de $Q_n(z)$ pour des $|z|$ élevés. A cet effet, on fait intervenir l'égalité

$$\frac{1}{s-z}=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-s/z}=-\frac{1}{z}\left[\sum_{k=0}^{p}\left(\frac{s}{z}\right)^k+\frac{(s/z)^{p+1}}{1-s/z}\right]=$$

$$=-\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{p}\left(\frac{s}{z}\right)^k+\frac{s^{p+1}}{(s-z)\,z^{p+1}}.$$

Intégrant cette égalité avec le poids $y_n(s)\,\rho(s)$ entre $a$ et $b$, on obtient

$$\rho(z)\,Q_n(z)=-\sum_{k=n}^{p}\frac{1}{z^{k+1}}\int_a^b s^k y_n(s)\,\rho(s)\,ds+\frac{r_p(z)}{z^{p+1}}, \tag{6}$$

où

$$r_p(z)=\int_a^b\frac{s^{p+1}y_n(s)\,\rho(s)}{s-z}\,ds.$$

Pour l'intégration, nous avons profité de la propriété d'orthogonalité (5) du § 6.

Si $z\to\infty$ et la distance la plus courte entre le point $z$ et l'intervalle $]a, b[$ est bornée inférieurement, la quantité $|r_p(z)|$ sera bornée et l'égalité (6) nous fournira la représentation asymptotique de la fonction $Q_n(z)$. En particulier, l'égalité (6) nous donne pour $p=n+1$:

$$Q_n(z)=-\frac{d_n^2}{a_n}\frac{1}{\rho(z)\,z^{n+1}}\left[1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right]. \tag{7}$$

Ici et dans le texte qui suit, nous utiliserons la notation suivante: $f_1(z)=O[f_2(z)]$ pour $z\to z_0$, si dans un voisinage du point $z=z_0$ les fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ vérifient l'inégalité

$$|f_1(z)|\leqslant C\,|f_2(z)|,$$

où $C$ est une constante.

De la représentation asymptotique (7) on voit que les fonctions de deuxième espèce $Q_n(z)$ et les polynômes orthogonaux classiques $y_n(z)$ présentent des comportements asymptotiques différents et sont donc des solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle pour les polynômes orthogonaux classiques (à l'exception du cas de $n=0$, $\alpha+\beta+1=0$ pour les polynômes de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$).

**3. Relations de récurrence et formules de dérivation.** Puisque la représentation intégrale (3) de $Q_n(z)$ ne diffère de celle de $y_n(z)$

que par un facteur constant $1/(2\pi i)$ et le choix du contour, on a pour les fonctions $Q_n(z)$ et $y_n(z)$ les mêmes relations de récurrence et les mêmes formules de dérivation (voir §§ 4, 5):

$$zQ_n(z) = \alpha_n Q_{n+1}(z) + \beta_n Q_n(z) + \gamma_n Q_{n-1}(z) \quad (n \geqslant 1), \tag{8}$$

$$\sigma(z) Q_n'(z) = \frac{\varkappa_n}{\tau_n'} \left[ \frac{B_n}{B_{n+1}} Q_{n+1}(z) - \tau_n(z) Q_n(z) \right]. \tag{9}$$

La représentation intégrale de la dérivée d'une fonction de deuxième espèce s'obtient à l'aide de la formule (7) du § 4:

$$Q_n'(z) = \frac{\varkappa_n B_n n!}{\sigma(z)\rho(z)} \int_a^b \frac{\sigma^n(s)\rho(s)}{(s-z)^n} ds,$$

où $\varkappa_n = \tau' + \frac{n-1}{2}\sigma''$. Pour $n = 0$ cette représentation conduit à l'équation différentielle suivante pour la fonction $Q_0(z)$:

$$\sigma(z)\rho(z) Q_0'(z) = C, \tag{10}$$

où

$$C = \varkappa_0 B_0 \int_a^b \rho(s)\, ds = \frac{\varkappa_0 d_0^2}{a_0}.$$

Nous avons profité de ce que $y_0(z) = B_0 = a_0$ en vertu de la formule de Rodrigues.

De l'équation (10) on déduit sans peine une représentation intégrale commode de la fonction $Q_0(z)$:

$$Q_0(z) = Q_0(z_0) - C \int_z^{z_0} \frac{ds}{\sigma(s)\rho(s)}. \tag{11}$$

Comme $z_0$, il y a intérêt à prendre un $z$ tel que $Q_0(z_0) = 0$. La représentation asymptotique (7) montre que pour les fonctions de Laguerre de deuxième espèce $Q_0^\alpha(z)$ on peut poser $z_0 = -\infty$, et pour les fonctions d'Hermite de deuxième espèce, $z_0 = \pm i\infty$. Pour les fonctions de Jacobi $Q_0^{(\alpha,\beta)}(z)$, on peut poser $z_0 = \infty$ pour $\alpha + \beta > -1$.

Il ressort de (11) que la quantité $Q_0(x \pm i0)$ est bornée pour $z \to x$, où $x \in ]a, b[$; il existe donc, en vertu de (5), des valeurs limites $Q_n(x \pm i0)$. Puisque, conformément à (4), on a $\overline{\rho(z) Q_n(z)} = \rho(\bar z) Q_n(\bar z)$ (où la barre symbolise la conjuguée complexe), il est plus commode de choisir comme seconde solution de l'équation pour les polynômes orthogonaux classiques avec $z = x$, au lieu de $Q_n(x \pm i0)$, une combinaison réelle de ces fonctions:

$$\rho(x) Q_n(x) = 1/2\, [\rho(x + i0) Q_n(x + i0) + \rho(x - i0) Q_n(x - i0)]$$

(rappelons que $\rho(x + i0) = \rho(x)$).

On montre que les fonctions $Q_n(x)$ ainsi définies vérifient les mêmes relations que les polynômes $y_n(x)$ pour $x \in ]a, b[$. La représentation intégrale (4) reste vraie elle aussi, à condition d'entendre l'intégrale dans le sens de sa valeur principale, car l'intégrale dans (4) est une intégrale du type de Cauchy (voir par exemple [9])

**4. Quelques fonctions spéciales voisines des fonctions $Q_0(z)$.** Il découle de la formule (11) que la fonction $Q_0(z)$ se laisse réduire, pour les polynômes de Jacobi, à la *fonction bêta incomplète* $B_z(p, q)$ en faisant le changement $t = 2/(1+s)$; pour les polynômes de Laguerre, à la *fonction gamma incomplète* $\Gamma(a, z)$ en faisant le changement $t = -s$; pour les polynômes d'Hermite, à la *fonction des erreurs* $\Phi(z)$ en faisant le changement $t = \pm is$. Les fonctions $B_z(p, q)$, $\Gamma(a, z)$ et $\Phi(z)$ se définissent comme suit:

$$B_z(p, q) = \int_0^z t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt,$$

$$\Gamma(a, z) = \int_z^\infty e^{-t}t^{a-1}\,dt, \quad \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}\,dt.$$

Considérons à titre d'exemple la représentation intégrale (11) des fonctions de Laguerre et d'Hermite de deuxième espèce.

1) *Fonction de Laguerre de deuxième espèce.* Posons dans (11) $z_0 = -\infty$. Il vient

$$Q_0(z) \equiv Q_0^\alpha(z) = \Gamma(\alpha+1)\int_z^{-\infty}\frac{ds}{\sigma(s)\,\rho(s)} = \Gamma(\alpha+1)\int_z^{-\infty}\frac{e^s}{s^{\alpha+1}}\,ds\ ^*). \quad (12)$$

En donnant à $\alpha$ des valeurs entières, $\alpha = m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, la fonction $Q_0^\alpha(z)$ se laisse exprimer à l'aide des fonctions

$$E_m(z) = z^{m-1}\int_z^{+\infty}\frac{e^{-s}}{s^m}\,ds = \int_1^\infty \frac{e^{-zt}}{t^m}\,dt, \quad (13)$$

largement utilisées dans les problèmes liés au passage du rayonnement à travers la matière, ainsi que dans la théorie des réacteurs nucléaires. Les fonctions $E_m(z)$ sont généralement appelées *exponentielles intégrales*. Changeant dans (12) $s$ en $-s$, on obtient pour $z > 0$

$$Q_0^m(-z) = \frac{(-1)^m\, m!}{z^m}\, E_{m+1}(z). \quad (14)$$

---

*) Nous avons pratiqué une coupure entre $z = 0$ et $z = +\infty$ le long de l'axe réel afin d'assurer l'univocité des fonctions $Q_n(z)$. Conformément à cette coupure, en calculant $s^{\alpha+1}$ dans (12), on posera $0 < \arg s < 2\pi$.

A l'aide de la représentation asymptotique (7) de $Q_0(z)$, on tire aisément de (14) la représentation asymptotique de la fonction $E_m(z)$:

$$E_m(z)=\frac{e^{-z}}{z}\left[1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right]. \tag{15}$$

Par dérivation de (13), on obtient les formules de dérivation

$$E'_m(z)=\frac{m-1}{z}E_m(z)-\frac{e^{-z}}{z}=-E_{m-1}(z)$$

qui donnent lieu à la *relation de récurrence* suivante:

$$E_m(z)=\frac{1}{m-1}[e^{-z}-zE_{m-1}(z)]. \tag{16}$$

Voyons maintenant ce que devient la fonction $E_m(z)$ quand $z\to 0$. Pour le savoir, en vertu de (16), il suffit de connaître le comportement de la fonction $E_1(z)$. Celle-ci admet une singularité pour $z\to 0$. Faisons quelques transformations identiques afin de localiser et éclaircir la nature de la singularité:

$$E_1(z)=\int_z^\infty \frac{e^{-s}}{s}ds=\int_1^\infty \frac{e^{-s}}{s}ds+\int_z^1 \frac{e^{-s}-1}{s}ds+\int_z^1\frac{ds}{s}=$$

$$=C-\ln z-\int_0^z \frac{e^{-s}-1}{s}ds,$$

où

$$C=\int_1^\infty \frac{e^{-s}}{s}ds+\int_0^1 \frac{e^{-s}-1}{s}ds.$$

En développant $e^{-s}$ suivant les puissances de $s$ et en faisant l'intégration terme à terme, on obtient le développement de la fonction $E_1(z)$ suivant les puissances de $z$:

$$E_1(z)=C-\ln z+\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{z^k}{k!}. \tag{17}$$

Pour calculer la constante $C$, nous ferons l'intégration par parties:

$$C=e^{-s}\ln s\,|_1^\infty+\int_1^\infty e^{-s}\ln s\,ds+(e^{-s}-1)\ln s\,|_0^1+\int_0^1 e^{-s}\ln s\,ds=$$

$$=\int_0^\infty e^{-s}\ln s\,ds=\Gamma'(1)=-\gamma$$

($\gamma$ est la constante d'Euler, voir Appendice A).

A côté de $E_1(z)$, on utilise souvent dans la pratique la *fonction exponentielle intégrale* Ei $(z)$ voisine de $E_1(z)$ et liée à cette dernière par la relation

$$E_1(z) = -\mathrm{Ei}(-z),$$

et les fonctions

$$\mathrm{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin s}{s}\, ds, \quad \mathrm{Ci}(z) = \int_\infty^z \frac{\cos s}{s}\, ds$$

appelées respectivement fonction *sinus intégral* et fonction *cosinus intégral*. Pour $z > 0$ on a en vertu du lemme de Jordan (voir [9])

$$E_1(iz) = \int_{iz}^\infty \frac{e^{-s}}{s}\, ds = \int_{iz}^{+i\infty} \frac{e^{-s}}{s}\, ds = \int_z^\infty \frac{e^{-it}}{t}\, dt =$$

$$= \int_z^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt - i \int_z^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = -\left\{\mathrm{Ci}(z) + i\left[\frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(z)\right]\right\},$$

car

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

On a donc pour $z > 0$

$$\begin{aligned} \mathrm{Ci}(z) &= -\frac{1}{2}[E_1(iz) + E_1(-iz)], \\ \mathrm{Si}(z) &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2i}[E_1(iz) - E_1(-iz)]. \end{aligned} \qquad (18)$$

En vertu du principe du prolongement analytique, les relations (18) restent vraies dans un domaine plus large de variation de $z$.

Des formules (15), (17), (18) on déduit sans peine les *représentations asymptotiques* et les *développements suivant les puissances de* $z$ pour Si $(z)$ et Ci $(z)$. On a par exemple

$$\mathrm{Si}(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!},$$

$$\mathrm{Ci}(z) = \gamma + \ln z - \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1} z^{2k}}{2k(2k)!}.$$

Puisque les séries de puissances pour Si $(z)$ et Ci $(z)$ convergent dans tout le plan complexe, la fonction Si $(z)$ est analytique dans le plan complexe tout entier, tandis que la fonction Ci $(z)$ l'est dans le plan muni d'une coupure le long du demi-axe $(-\infty, 0)$.

2) *Fonction d'Hermite de deuxième espèce.* Posons dans (11) $z_0 = \pm i\infty$ (le signe étant celui de Im $z$). Il vient

$$Q_0(z) = 2\sqrt{\pi} \int_z^{\pm i\infty} e^{s^2}\, ds.$$

Pour $z > 0$ il vient

$$Q_0(iz) = 2\sqrt{\pi} \int_{iz}^{i\infty} e^{s^2}\, ds = 2\sqrt{\pi}\, i \int_z^{\infty} e^{-s^2}\, ds = \pi i\,[1 - \Phi(z)],$$

où

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-s^2}\, ds \qquad (19)$$

est la *fonction des erreurs.*

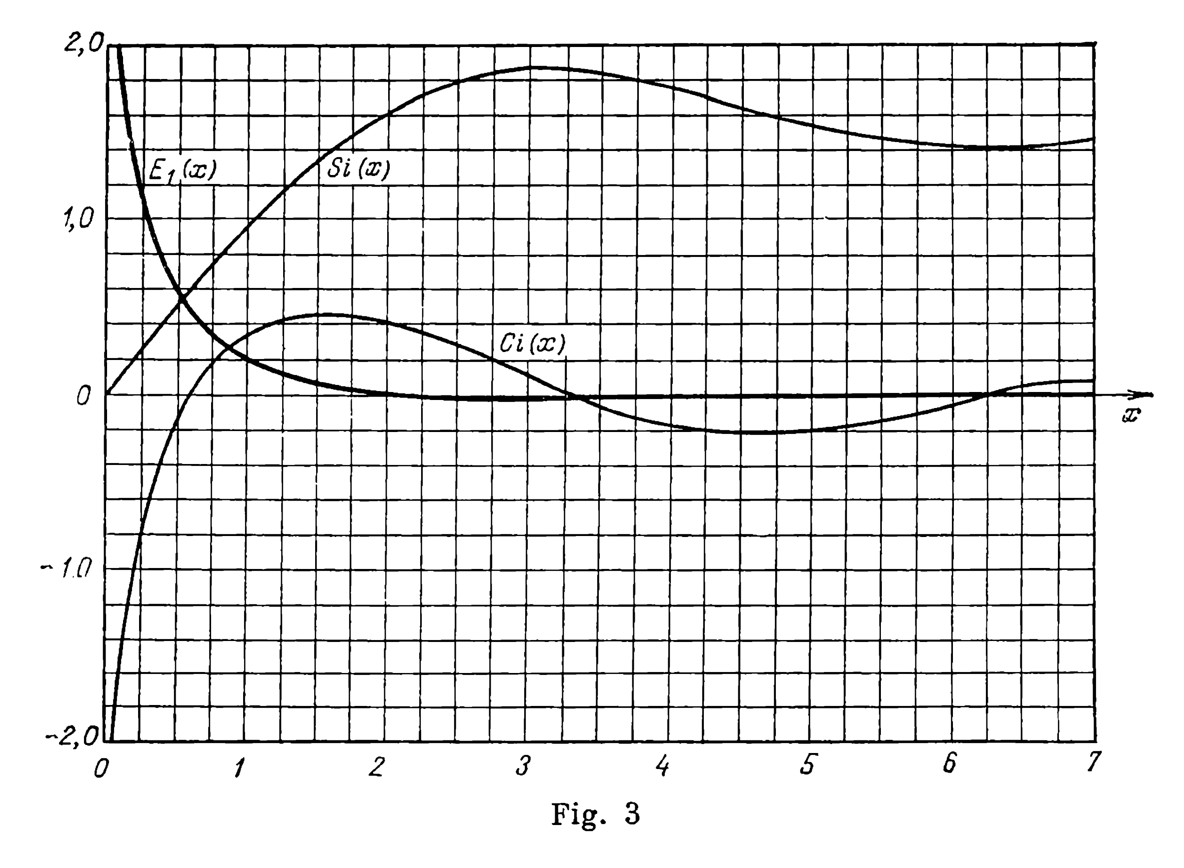



Fig. 3

A l'aide de la représentation asymptotique (7) de $Q_0(z)$, on écrit sans difficulté la *représentation asymptotique de la fonction des erreurs:*

$$\Phi(z) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-z^2}}{z}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right].$$

Le *développement de la fonction* $\Phi(z)$ *suivant les puissances de* $z$ s'obtient en développant $e^{-s^2}$ en série dans (19) et en faisant l'intégration terme à terme:

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{k!\,(2k+1)}.$$

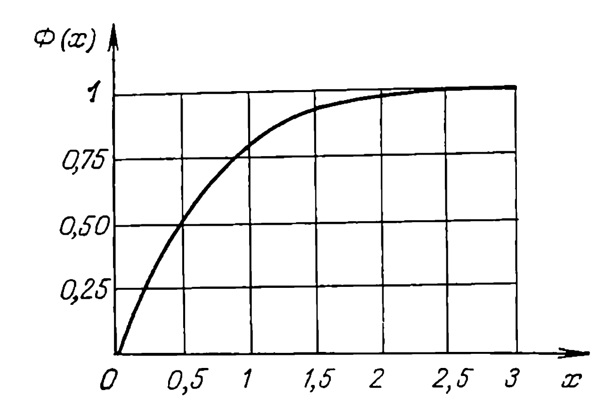



Fig. 4

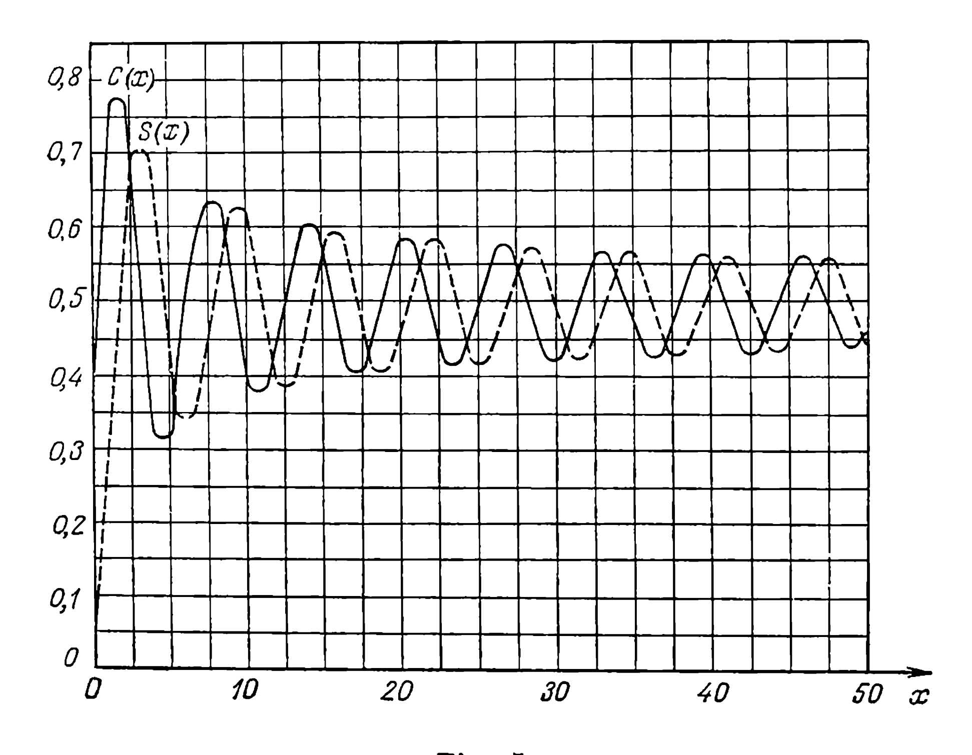



Fig. 5

A la fonction des erreurs sont étroitement liées les *intégrales de Fresnel*:

$$S(z)=\int_0^z \sin\frac{\pi t^2}{2}\,dt,\qquad C(z)=\int_0^z \cos\frac{\pi t^2}{2}\,dt.$$

On a en effet pour $z > 0$

$$C(z) - iS(z) = \int_0^z e^{-i\frac{\pi t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2i}} \Phi\left(\sqrt{i\frac{\pi}{2}} z\right).$$

La relation déduite permet de définir le comportement asymptotique et le développement en série des intégrales de Fresnel.

Les courbes représentatives des fonctions $E_1(x)$, Si $(x)$, Ci $(x)$, $\Phi(x)$, $S(x)$ et $C(x)$ sont montrées sur les figures 3 à 5.

## § 12. Polynômes orthogonaux classiques d'une variable discrète

Nous allons considérer une généralisation de la notion de polynômes orthogonaux classiques, à savoir : les polynômes orthogonaux classiques d'une variable discrète.

Ces polynômes sont largement utilisés à l'heure actuelle pour l'établissement de schémas aux différences fournissant une bonne approximation de solutions d'une série d'équations de Physique mathématique, pour le dépouillement des résultats de mesures, pour le calcul des sommes de la forme $\sum_i \rho(x_i) f(x_i)$ pour une fonction $\rho(x)$ donnée d'après les formules de quadrature du type de Gauss (voir appendice C). On a découvert, assez récemment, un lien entre les coefficients de Clebsch-Gordan, largement utilisés en Mécanique quantique, et les polynômes d'une variable discrète ; ce lien a stimulé l'étude approfondie de ces coefficients.

**1. Equation aux différences analogue à l'équation du type hypergéométrique.** On a vu au § 2 que l'équation différentielle du type hypergéométrique

$$\sigma(x) y'' + \tau(x) y' + \lambda y = 0 \tag{1}$$

admet comme solutions particulières, pour certaines valeurs de $\lambda$, des polynômes orthogonaux classiques. En plus de ces derniers, on utilise souvent en pratique des *polynômes orthogonaux classiques d'une variable discrète* $y_n(x)$ qui vérifient l'équation

$$\sigma(x) \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} + \tau(x) \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + \lambda(x) = 0. \tag{2}$$

Ici $\sigma(x)$ et $\tau(x)$ sont des polynômes de degré non supérieur à 2 et à 1 respectivement ; $h$ et $\lambda$ sont des constantes. L'équation aux différences (2) est analogue à (1). En faisant un changement linéaire de la variable indépendante, on réduit l'équation (2) à la forme

$$\sigma(x) \Delta\nabla y + \tau(x) \Delta y + \lambda y = 0, \tag{3}$$

où

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x), \quad \nabla f(x) = f(x) - f(x-1).$$

Avant d'étudier les propriétés des solutions de l'équation (3), considérons quelques propriétés des opérateurs $\Delta$ et $\nabla$.

On a

$$\Delta f(x) = \nabla f(x+1), \tag{4}$$

$$\Delta\nabla f(x) = \nabla\Delta f(x) = f(x+1) - 2f(x) + f(x-1), \tag{5}$$

$$\Delta [f(x)\, g(x)] = f(x)\, \Delta g(x) + g(x+1)\, \Delta f(x). \tag{6}$$

De l'égalité (6) on déduit la formule de *sommation par parties*:

$$\sum_i f(x_i)\, \Delta g(x_i) = f(x_i)\, g(x_i)\, \big|_a^b - \sum_i g(x_{i+1})\, \Delta f(x_i). \tag{7}$$

Ici $x_{i+1} = x_i + 1$; la sommation se fait suivant des $i$ tels que $a \leqslant x_i \leqslant b - 1$. Remarquons que pour un polynôme quelconque $q_m(x)$ de degré $m$, les quantités $\Delta q_m(x)$ et $\nabla q_m(x)$ sont des polynômes de degré $m - 1$, et $\Delta^m q_m(x) = \nabla^m q_m(x) = q_m^{(m)}(x)$.

Dégageons certaines propriétés des solutions de (3) qui sont analogues à celles des solutions de (1). Montrons que la *fonction* $v_1(x) = \Delta y(x)$ *vérifie l'équation aux différences* du type (3). A cet effet, appliquons l'opérateur $\Delta$ aux deux membres de l'équation (3):

$$\Delta [\sigma(x)\, \nabla v_1(x)] + \Delta [\tau(x)\, v_1(x)] + \lambda v_1(x) = 0.$$

A l'aide des formules (6) et (4), réduisons cette équation à la forme

$$\sigma(x)\, \Delta\nabla v_1 + \tau_1(x)\, \Delta v_1 + \mu_1 v_1 = 0, \tag{8}$$

où $\tau_1(x) = \tau(x+1) + \Delta\sigma(x)$ et $\mu_1 = \lambda + \Delta\tau(x)$. Puisque $\tau_1(x)$ est un polynôme de degré non supérieur à 1 et que $\mu$ est indépendant de $x$, l'équation (8) pour $v_1(x)$ est du même type que (3).

La réciproque se vérifie tout aussi facilement: *toute solution de* (8) *pour* $\lambda \neq 0$ *se laisse mettre sous la forme* $v_1(x) = \Delta y(x)$, où $y(x)$ est une solution de (3) qui s'exprime en fonction de $v_1(x)$ comme suit:

$$y(x) = -\frac{1}{\lambda} [\sigma(x)\, \nabla v_1 + \tau(x)\, v_1].$$

On obtient de même pour la fonction $v_n(x) = \Delta^n y(x)$ une équation aux différences du type hypergéométrique

$$\sigma(x)\, \Delta\nabla v_n + \tau_n(x)\, \Delta v_n + \mu_n v_n = 0, \tag{9}$$

où

$$\tau_n(x) = \tau_{n-1}(x+1) + \Delta\sigma(x), \quad \tau_0(x) = \tau(x), \tag{10}$$

$$\mu_n = \mu_{n-1} + \Delta\tau_{n-1}(x), \quad \mu_0 = \lambda. \tag{11}$$

La réciproque est aussi vraie: toute solution de (9) pour $\mu_k \neq 0$ ($k = 0, 1, \ldots, n - 1$) peut être représentée sous la forme $v_n(x) = \Delta^n y(x)$, où $y(x)$ est une solution de l'équation (3).

Pour mettre $\mu_n$ sous forme explicite, il suffit de remarquer que $\Delta\tau_n(x)$ et $\Delta^2\sigma(x)$ sont indépendants de $x$. D'où

$$\Delta\tau_n = \Delta\tau_{n-1} + \Delta^2\sigma = \ldots = \Delta\tau + n\Delta^2\sigma$$

et donc

$$\mu_n = \mu_{n-1} + \Delta\tau + (n-1)\,\Delta^2\sigma.$$

On en tire

$$\mu_n = \mu_0 + \sum_{k=1}^{n} (\mu_k - \mu_{k-1}) = \lambda + n\Delta\tau + \frac{n(n-1)}{2}\Delta^2\sigma =$$

$$= \lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma''. \qquad (12)$$

De la relation (10) qui lie $\tau_n(x)$ et $\tau_{n-1}(x)$, on obtient facilement par récurrence que

$$\tau_n(x) = \sigma(x+n) - \sigma(x) + \tau(x+n).$$

**2. Formule de Rodrigues.** La propriété étudiée dans le n° 1 permet de construire la famille des solutions particulières de l'équation (3) correspondant à des valeurs déterminées de $\lambda$. En effet, l'équation (9) admet pour $\mu_n = 0$ une solution particulière $v_n(x) =$ $=$ const. Puisque $v_n(x) = \Delta^n y(x)$, cela revient à dire que l'équation (3) admet pour $\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{1}{2}n(n-1)\sigma''$ une solution particulière $y = y_n(x)$, polynôme de degré $n$.

Afin d'expliciter $y_n(x)$, mettons les équations (3) et (9) sous forme auto-adjointe:

$$\Delta(\sigma\rho\nabla y) + \lambda\rho y = 0, \qquad (13)$$

$$\Delta(\sigma\rho_n\nabla v_n) + \mu_n\rho_n v_n = 0. \qquad (14)$$

Ici les fonctions $\rho(x)$ et $\rho_n(x)$ vérifient les équations aux différences

$$\Delta(\sigma\rho) = \tau\rho, \qquad (15)$$

$$\Delta(\sigma\rho_n) = \tau_n\rho_n. \qquad (16)$$

A l'aide de la formule (10), on établit sans peine une relation unissant les fonctions $\rho_n(x)$ et $\rho_{n-1}(x)$. On a

$$\frac{\Delta[\sigma(x)\rho_n(x)]}{\rho_n(x)} = \tau_n(x) = \tau_{n-1}(x+1) + \Delta\sigma(x) =$$

$$= \frac{\Delta[\sigma(x+1)\rho_{n-1}(x+1)]}{\rho_{n-1}(x+1)} + \Delta\sigma(x).$$

D'où

$$\frac{\rho_n(x+1)}{\rho_n(x)} = \frac{\sigma(x+2)\rho_{n-1}(x+2)}{\sigma(x+1)\rho_{n-1}(x+1)},$$

i. e.

$$\rho_n(x) = \sigma(x+1)\,\rho_{n-1}(x+1).$$

Comme $\rho_0(x) = \rho(x)$, on a

$$\rho_n(x) = \rho(x+n) \prod_{k=1}^{n} \sigma(x+k). \qquad (17)$$

L'équation (14) se réduit donc à une simple relation entre les fonctions $v_n(x)$ et $v_{n+1}(x)$. En effet,

$$\rho_n(x) v_n(x) = -\frac{1}{\mu_n} \Delta [\sigma(x) \rho_n(x) \nabla v_n(x)] =$$
$$= -\frac{1}{\mu_n} \nabla [\sigma(x+1) \rho_n(x+1) \Delta v_n(x)],$$

i.e.

$$\rho_n(x) v_n(x) = -\frac{1}{\mu_n} \nabla [\rho_{n+1}(x) v_{n+1}(x)].$$

D'où l'on tire successivement, pour $m < n$,

$$\rho_m v_m = -\frac{1}{\mu_m} \nabla (\rho_{m+1} v_{m+1}) =$$
$$= \left(-\frac{1}{\mu_m}\right)\left(-\frac{1}{\mu_{m+1}}\right) \nabla^2 (\rho_{m+2} v_{m+2}) = \ldots = \frac{A_m}{A_n} \nabla^{n-m} (\rho_n v_n), \qquad (18)$$

où

$$A_n = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \mu_k, \qquad A_0 = 1. \qquad (19)$$

Si $y = y_n(x)$, on a $v_n(x) = \text{const}$, ce qui donne l'expression suivante de $v_m(x) = \Delta^m y(x)$:

$$\Delta^m y_n(x) = \frac{A_{mn} B_n}{\rho_m(x)} \nabla^{n-m} [\rho_n(x)], \qquad (20)$$

où

$$A_{mn} = A_m(\lambda)\,|_{\lambda=\lambda_n},$$
$$B_n = \frac{1}{A_{nn}} \Delta^n y_n(x) = \frac{1}{A_{nn}} y_n^{(n)}(x). \qquad (21)$$

En particulier, pour $m = 0$ on en déduit la forme explicite des polynômes $y_n(x)$:

$$y_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \nabla^n [\rho_n(x)]. \qquad (22)$$

Ainsi donc, la formule (22) définit les solutions polynomiales de l'équation (3) de façon univoque, à un facteur de normalisation $B_n$ près. Ces solutions correspondent à $\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{1}{2} n \times \times (n-1) \sigma''$. La relation (22) est une formule aux différences analogue à la formule de Rodrigues pour les polynômes orthogonaux classiques. A l'aide de (4) et de (17), on met la formule de Rodri-

gues (22) sous une forme différente:

$$y_n(x)=\frac{B_n}{\rho(x)}\Delta^n[\rho_n(x-n)]=\frac{B_n}{\rho(x)}\Delta^n\left[\rho(x)\prod_{k=0}^{n-1}\sigma(x-k)\right]. \quad (23)$$

**3. Propriété d'orthogonalité.** La propriété d'orthogonalité des polynômes $y_n(x)$ sera démontrée par analogie au cas des polynômes orthogonaux classiques (§ 5). Considérons les équations aux différences pour les polynômes $y_n(x)$ et $y_m(x)$:

$$\Delta(\sigma\rho\nabla y_n)+\lambda_n\rho y_n=0,$$
$$\Delta(\sigma\rho\nabla y_m)+\lambda_m\rho y_m=0.$$

Multiplions la première équation par $y_m(x)$, la seconde par $y_n(x)$ et retranchons la seconde de la première; il vient

$$(\lambda_m-\lambda_n)\rho y_m y_n=\Delta[\sigma\rho(y_m\nabla y_n-y_n\nabla y_m)]. \quad (24)$$

Posons dans (24) $x=x_i$, où $x_{i+1}=x_i+1$, et faisons la sommation suivant des $i$ tels que $a\leqslant x_i\leqslant b-1$:

$$(\lambda_m-\lambda_n)\sum_i\rho(x_i)y_m(x_i)y_n(x_i)=\sigma\rho(y_m\nabla y_n-y_n\nabla y_m)\Big|_a^b.$$

L'expression $(y_m\nabla y_n-y_n\nabla y_m)$ est un polynôme en $x$. Si l'on a

$$\sigma(x)\rho(x)x^k\big|_{x=a,b}=0\quad(k=0,1,\ldots), \quad (25)$$

le second membre de l'égalité obtenue s'annulera, i.e. pour $m\neq n$ on aura

$$\sum_i y_m(x_i)y_n(x_i)\rho(x_i)=0. \quad (26)$$

Analogue à l'égalité (9) du § 5, l'égalité (26) s'en déduit en remplaçant l'intégrale définie par la somme. Orthogonaux dans le sens de la formule (26), les polynômes $y_n(x)$ gardent toutes les propriétés démontrées dans le cas des polynômes orthogonaux quelconques. Ils vérifient en particulier la relation de récurrence

$$xy_n(x)=\alpha_n y_{n+1}(x)+\beta_n y_n(x)+\gamma_n y_{n-1}(x) \quad (27)$$

dans laquelle

$$\alpha_n=\frac{a_n}{a_{n+1}},\quad \beta_n=\frac{b_n}{a_n}-\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}},\quad \gamma_n=\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{d_n^2}{d_{n-1}^2},$$
$$d_n^2=\sum_i y_n^2(x_i)\rho(x_i)$$

est le carré de la norme, $a_n$ et $b_n$ sont les coefficients affectant les puissances de plus haut degré du polynôme $y_n(x)$.

Les polynômes $y_n(x)$ pour lesquels l'intervalle $]a, b[$ est situé sur l'axe réel et la fonction $\rho(x)$ vérifie l'équation (15) et la con-

dition (25) sont appelés *polynômes orthogonaux classiques d'une variable discrète*. On impose généralement à ces polynômes une condition supplémentaire $\rho(x_i) > 0$ si $a \leqslant x_i \leqslant b-1$.

Les polynômes $\Delta y_n(x)$ vérifient l'équation que l'on obtient de l'équation de $y_n(x)$ en remplaçant $\rho(x)$ par $\rho_1(x) = \sigma(x+1) \times \rho(x+1) = [\tau(x) + \sigma(x)]\,\rho(x)$ et $\lambda$ par $\mu_1 = \lambda + \tau'$. La fonction $\rho_1(x)$ vérifie évidemment une condition analogue à (25):

$$\sigma(x)\,\rho_1(x)\,x^k\,|_{x=a,\,b-1} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Les polynômes $\Delta y_n(x)$ possèdent donc la propriété d'orthogonalité suivante:

$$\sum_{a \leqslant x_i \leqslant b-2} \Delta y_m(x_i)\,\Delta y_n(x_i)\,\rho_1(x_i) = 0 \quad (m \neq n).$$

D'une manière analogue, on démontre sans peine que les polynômes $\Delta^k y_n(x)$ vérifient les relations suivantes:

$$\sum_{a \leqslant x_i \leqslant b-k-1} \Delta^k y_m(x_i)\,\Delta^k y_n(x_i)\,\rho_k(x_i) = 0 \quad (m \neq n).$$

**4. Polynômes de Hahn, de Tchébychev, de Meixner, de Krawtchouk et de Charlier.** Proposons-nous de mettre sous forme explicite le poids $\rho(x)$ par rapport auquel sont orthogonaux les polynômes orthogonaux classiques d'une variable discrète. Pour le faire, nous récrirons l'équation aux différences (15) sous la forme

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = \frac{\sigma(x) + \tau(x)}{\sigma(x+1)}. \tag{28}$$

On s'assure sans difficulté que les solutions de l'équation aux différences

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = f(x),$$

dans laquelle le second membre peut être mis sous la forme de produit ou de quotient de deux fonctions, présentent la propriété élémentaire suivante:

*Si les fonctions $\rho_1(x)$ et $\rho_2(x)$ sont solutions des équations*

$$\frac{\rho_1(x+1)}{\rho_1(x)} = f_1(x), \qquad \frac{\rho_2(x+1)}{\rho_2(x)} = f_2(x),$$

*l'équation*

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = f(x)$$

*admettra comme solution pour $f(x) = f_1(x)\,f_2(x)$ la fonction $\rho(x) = C\rho_1(x)\,\rho_2(x)$, et pour $f(x) = f_1(x)/f_2(x)$ la fonction $\rho(x) = C\,\dfrac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)}$, où $C = C(x)$ est une fonction périodique quelconque de période égale à l'unité.*

On s'assure aisément que le choix arbitraire du facteur périodique de la fonction $\rho(x)$ n'affecte aucunement la forme explicite des polynômes $y_n(x)$ obtenus d'après la formule de Rodrigues (23).

Puisque le second membre de (28) est une fonction rationnelle, sa solution se laisse exprimer en fonction des solutions des équations aux différences

$$\rho(x+1)/\rho(x) = \gamma + x, \tag{29}$$

$$\rho(x+1)/\rho(x) = \gamma - x, \tag{30}$$

$$\rho(x+1)/\rho(x) = \gamma, \tag{31}$$

où $\gamma$ est une constante. Comme $\gamma + x = \Gamma(\gamma + x + 1)/\Gamma(\gamma + x)$, l'équation (29) admet une solution particulière de la forme

$$\rho(x) = \Gamma(\gamma + x).$$

D'une façon analogue, en se servant de l'égalité

$$\gamma - x = \frac{\Gamma(\gamma - x + 1)}{\Gamma(\gamma - x)} = \frac{1}{\Gamma[(\gamma+1)-(x+1)]} : \frac{1}{\Gamma(\gamma+1-x)},$$

on obtient une solution particulière de (30):

$$\rho(x) = 1/\Gamma(\gamma + 1 - x).$$

Dans le même ordre d'idées, on montre sans difficulté que l'équation (31) admet comme solution particulière la fonction $\rho(x) = \gamma^x$.

Voyons maintenant comment on doit choisir $a$ et $b$ pour que les conditions aux limites (25) soient vérifiées et que le poids $\rho(x_i)$ reste positif pour $a \leqslant x_i \leqslant b - 1$. Si $a$ est fini, on a par définition $\rho(a) > 0$ et la condition (25) pour $x = a$ ne peut être vérifiée que si $\sigma(a) = 0$, i. e. si $a$ est racine du polynôme $\sigma(x)$. Puisqu'on a par définition dans (3) $\sigma(0) = 0$ pour $\sigma(x) \neq \text{const}$, on peut poser dans ce cas $a = 0$.

Si $b$ est fini, on a en vertu de (15)

$$\sigma(b)\,\rho(b) = [\sigma(b-1) + \tau(b-1)]\,\rho(b-1).$$

Puisque $\rho(b-1) > 0$, la quantité $b - 1$ doit être racine du polynôme $\sigma(x) + \tau(x)$.

Ces raisonnements à l'appui, cherchons les solutions de l'équation (28) pour différents degrés du polynôme $\sigma(x)$.

1) Soit $\sigma(x) = x(\gamma_1 - x)$. Alors

$$\sigma(x) + \tau(x) = (x - \gamma_2)(\gamma_3 - x).$$

Ici $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sont des constantes. L'équation (28) se présente alors comme suit

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = \frac{(x-\gamma_2)(\gamma_3 - x)}{(x+1)(\gamma_1 - 1 - x)}.$$

Cette équation admet comme solution la fonction

$$\rho(x) = C\frac{\Gamma(\gamma_1 - x)\,\Gamma(x - \gamma_2)}{\Gamma(x+1)\,\Gamma(\gamma_3 + 1 - x)}. \tag{32}$$

Ici et dans le texte qui suit, $C = C(x)$ est une fonction périodique quelconque de période égale à l'unité.

Choisissons les constantes $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ de telle sorte que, pour des valeurs déterminées de $a$ et de $b$, les conditions aux limites (25) soient vérifiées et que le poids $\rho(x_i)$ soit positif pour $a \leqslant x_i \leqslant b - 1$. Si $a$ et $b$ sont finis, on peut, sans diminuer la généralité, choisir $a = 0$ et $b = N$ ($N$ entier positif). Puisqu'on doit avoir

$$\sigma(N-1) + \tau(N-1) = 0,$$

il convient de poser $\gamma_3 = N - 1$. Pour que le poids $\rho(x_i)$ soit positif pour $a \leqslant x_i \leqslant b - 1$, on peut choisir par exemple $C = 1$, $\gamma_1 = N + \alpha$, $\gamma_2 = -\beta - 1$, avec $\alpha > -1$, $\beta > -1$. L'on aura dans ce cas

$$\rho(x) = \frac{\Gamma(N + \alpha - x)\,\Gamma(\beta + 1 + x)}{\Gamma(x+1)\,\Gamma(N - x)} \tag{33}$$

$$(\alpha > -1, \quad \beta > -1).$$

Il existe une autre possibilité de choisir les constantes $\alpha$ et $\beta$ dans (33), ce choix assurant la positivité du poids $\rho(x_i)$ à un facteur périodique négligeable près. En effet, l'égalité (33) peut s'écrire, à l'aide de la formule de complément de la fonction gamma, sous une forme équivalente

$$\rho(x) = \frac{1}{\Gamma(x+1)\,\Gamma(N-x)\,\Gamma(1 - \alpha - N + x)\,\Gamma(-\beta - x)}, \tag{34}$$

en supprimant le facteur périodique négligeable

$$C_1(x) = \frac{\pi^2}{\sin\pi(N + \alpha - x)\sin\pi(\beta + 1 + x)}.$$

Le poids $\rho(x_i)$ sera positif dans (34) en posant $\alpha < 1 - N$, $\beta < 1 - N$.

Les polynômes $y_n(x)$ qu'on obtient d'après la formule de Rodrigues (23) avec $B_n = \frac{(-1)^n}{n!}$ et en déterminant le poids $\rho(x)$ par la formule (33) ou (34) seront appelés *polynômes de Hahn* et notés $h_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

Un cas particulier important des polynômes de Hahn est représenté par les *polynômes de Tchébychev d'une variable discrète*

$$t_n(x) = h_n^{(0,0)}(x)$$

pour lesquels $\rho(x) = 1$.

Si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$, la fonction $\rho(x)$ se comporte pour $x = \pm\infty$ comme une fonction puissance. Pour cette raison les

moments de la fonction poids $\sum_i x_i^k \rho(x_i)$ cesseront d'exister à partir d'une certaine valeur de $k$, ce qui veut dire que les polynômes orthogonaux $\{y_n(x)\}$ ne peuvent former qu'un système fini. De ce fait, le système de polynômes $\{y_n(x)\}$ ne sera pas complet dans la classe des fonctions $f(x)$ pour lesquelles $\sum_i f^2(x_i)\,\rho(x_i) < \infty$.

*Remarque 1.* Les polynômes $h_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ peuvent être exprimés à l'aide des polynômes $p_n(x, \beta, \gamma, \delta)$ considérés dans [1] pour lesquels on a

$$B_n = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad \sigma(x) = x(\delta - 1 + x), \quad \rho(x) = \frac{(\beta)_x(\gamma)_x}{x!\,(\delta_x)},$$

où

$$(a)_x = \frac{\Gamma(a+x)}{\Gamma(a)}.$$

Puisque, d'après la formule de complément de la fonction gamma, on a

$$\frac{\Gamma(\gamma+x)}{\Gamma(\delta+x)} = C\,\frac{\Gamma(1-\delta-x)}{\Gamma(1-\gamma-x)},$$

où

$$C = C(x) = \frac{\sin\pi(\delta+x)}{\sin\pi(\gamma+x)}$$

est une fonction périodique de période égale à l'unité, l'expression de $\rho(x)$ se réduira à (32) après avoir changé $\beta$ en $\beta + 1$, $\gamma$ en $1 - N$ et $\delta$ en $1 - N - \alpha$. On a donc

$$h_n^{(\alpha,\beta)}(x) = p_n(x,\ \beta+1,\ 1-N,\quad 1-N-\alpha).$$

*Remarque 2.* Il existe une relation remarquablement simple entre les coefficients de Clebsch-Gordan largement utilisés en mécanique quantique et les polynômes $h_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. Cette relation sera étudiée dans le § 25, n° 4.

2) Soit $\sigma(x) = x$. Trois cas peuvent se présenter alors:

$$\sigma(x) + \tau(x) = \begin{cases} \mu(\gamma + x), \\ \mu(\gamma - x), \\ \mu, \end{cases}$$

$\mu$ et $\gamma$ sont des constantes.. L'équation (28) admettra alors les solutions suivantes:

$$\rho(x) = \begin{cases} C\,\dfrac{\mu^x\Gamma(\gamma+x)}{\Gamma(x+1)}, \\ C\,\dfrac{\mu^x}{\Gamma(x+1)\,\Gamma(\gamma+1-x)}, \\ C\,\dfrac{\mu^x}{\Gamma(x+1)}. \end{cases}$$

Dans le premier cas, pour satisfaire aux conditions aux limites (25) et assurer que le poids $\rho(x_i)$ soit positif, on devra poser

$$a=0, \quad b=+\infty, \quad 0<\mu<1, \quad \gamma>0, \quad C=\frac{1}{\Gamma(\gamma)},$$

d'où

$$\rho(x)=\frac{\mu^x(\gamma)_x}{\Gamma(x+1)}, \quad \text{où} \quad (\gamma)_x=\frac{\Gamma(\gamma+x)}{\Gamma(\gamma)}.$$

Les polynômes correspondants sont appelés *polynômes de Meixner* $m_n^{(\gamma,\mu)}(x)$.

Dans le deuxième cas, on choisira

$$a=0, \quad b=N+1, \quad \gamma=N, \quad \mu=\frac{p}{q} \quad (p>0,\ q>0,\ p+q=1), \quad C=q^N N!$$

pour obtenir

$$\rho(x_i)=C_N^i p^i q^{N-i} \quad \text{avec} \quad C_N^i=\frac{N!}{i!\,(N-i)!}.$$

C'est la *distribution binomiale* bien connue en calcul des probabilités. Les polynômes correspondants s'appellent *polynômes de Krawtchouk* $k_n^{(p)}(x)$.

Dans le troisième cas, en posant

$$a=0, \quad b=+\infty, \quad C=e^{-\mu},$$

on aboutit à la *distribution de Poisson*

$$\rho(x_i)=\frac{e^{-\mu}\mu^i}{i!}.$$

Les polynômes orthogonaux correspondants d'une variable discrète portent le nom de *polynômes de Charlier* $c_n^{(\mu)}(x)$.

3) Le cas de $\sigma(x)=1$ est dénué d'intérêt, car il ne permet pas de déduire de nouveaux polynômes orthogonaux.

A l'aide des formules de Rodrigues (21) et (20) pour les polynômes $y_n(x)$ et $\Delta y_n(x)$, on obtient une relation qui lie les fonctions $\Delta y_n(x)$ pour les polynômes d'une variable discrète $y_n(x)$ considérés plus haut aux polynômes eux-mêmes. A cet effet, il suffit de remarquer que dans (20) on a $A_{1n}=-\lambda_n$ et, conformément à (17), $[\rho_1(x)]_{n-1}=\rho_n(x)$. En effet,

$$\rho_1(x)=\sigma(x+1)\,\rho(x+1),$$

$$[\rho_1(x)]_{n-1}=\rho_1(x+n-1)\prod_{k=1}^{n-1}\sigma(x+k)=\rho(x+n)\prod_{k=1}^{n}\sigma(x+k)=\rho_n(x).$$

D'où

$$\Delta y_n(x) = -\lambda_n \frac{B_n}{\rho_1(x)} \nabla^{n-1}[\rho_n(x)] =$$
$$= -\frac{\lambda_n B_n}{B_{n-1}^{(1)}} \frac{B_{n-1}^{(1)}}{\rho_1(x)} \nabla^{n-1}\{[\rho_1(x)]_{n-1}\} = -\frac{\lambda_n B_n}{B_{n-1}^{(1)}} y_{n-1}^{(1)}(x).$$

Ici $y_n^{(1)}(x)$ est le polynôme qu'on obtient en remplaçant dans l'expression de $y_n(x)$ la fonction $\rho(x)$ par $\rho_1(x)$, et $B_n^{(1)}$ est la constante de normalisation dans la formule de Rodrigues pour les polynômes $y_n^{(1)}(x)$ (les constantes $\lambda_n$ et $B_n$ pour les polynômes considérés plus haut sont indiquées dans les tableaux 3a et 3b).

Conformément à ce qui précède, on a pour les polynômes de Hahn $h_n^{(\alpha,\beta)}(x) \equiv h_n^{(\alpha,\beta)}(x, N)$, les polynômes de Krawtchouk $k_n^{(p)}(x) \equiv k_n^{(p)}(x, N)$, les polynômes de Meixner $m_n^{(\gamma,\mu)}(x)$ et les polynômes de Charlier $c_n^{(\mu)}(x)$:

$$\Delta h_n^{(\alpha,\beta)}(x, N) = (\alpha+\beta+n+1)\, h_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x, N-1),$$
$$\Delta k_n^{(p)}(x, N) = k_{n-1}^{(p)}(x, N-1),$$
$$\Delta m_n^{(\gamma,\mu)}(x) = -\frac{n(1-\mu)}{\mu} m_{n-1}^{(\gamma+1,\mu)}(x),$$
$$\Delta c_n^{(\mu)}(x) = -\frac{n}{\mu} c_{n-1}^{(\mu)}(x).$$

Considérons en conclusion les propriétés de symétrie des polynômes orthogonaux d'une variable discrète qui découlent des propriétés de symétrie du poids $\rho(x)$. Pour les polynômes de Hahn $h_n^{(\alpha,\beta)}(x, N)$, le poids $\rho(x)$ vérifie les relations de symétrie suivantes:

$$\rho(x) \equiv \rho(x, \alpha, \beta) = \rho(N-1-x, \beta, \alpha).$$

On peut donc récrire la relation d'orthogonalité

$$\sum_{i=0}^{N-1} h_n^{(\alpha,\beta)}(x_i)\, h_m^{(\alpha,\beta)}(x_i)\, \rho(x_i, \alpha, \beta) = 0 \quad (n \neq m),$$

en remplaçant $i$ par $N-1-i$, sous la forme

$$\sum_{i=0}^{N-1} h_n^{(\alpha,\beta)}(N-1-x_i)\, h_m^{(\alpha,\beta)}(N-1-x_i)\, \rho(x_i, \beta, \alpha) = 0 \quad (n \neq m).$$

Puisque le poids et l'intervalle d'orthogonalité $]a, b[$ définissent les polynômes orthogonaux d'une façon univoque, à un facteur constant près, on a

$$h_n^{(\alpha,\beta)}(N-1-x) = C_n h_n^{(\beta,\alpha)}(x),$$

où $C_n$ est une constante qu'on définit en identifiant les coefficients de $x^n$ dans les deux membres de l'égalité ; on trouve $C_n = (-1)^n$, et donc

$$h_n^{(\alpha,\beta)}(N-1-x) = (-1)^n h_n^{(\beta,\alpha)}(x).$$

D'une façon analogue, on a pour les polynômes de Krawtchouk

$$k_n^{(p)}(x) = (-1)^n k_n^{(q)}(N-x) \quad (p+q=1).$$

**5. Caractéristiques principales.** Nous allons calculer les valeurs des principales constantes pour les polynômes de Tchébychev, de Meixner, de Krawtchouk et de Charlier. La constante de normalisation $B_n$ dans la formule de Rodrigues (22) est par définition supposée égale à

$$B_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{n!} & \text{pour les polynômes } h_n^{(\alpha,\beta)}(x) \text{ et } t_n(x), \\ \mu^{-n} & \text{pour les polynômes } m_n^{(\gamma,\mu)}(x) \text{ et } c_n^{(\mu)}(x), \\ \dfrac{(-1)^n}{n!} q^n & \text{pour les polynômes } k_n^{(p)}(x). \end{cases}$$

Calculons les coefficients de la relation de récurrence (27). Le coefficient $a_n$ affectant le terme de plus haut degré du polynôme $y_n(x)$ se cherche de la même façon que dans le § 7 :

$$a_n = B_n \prod_{k=0}^{n-1} \left(\tau' + \frac{n+k-1}{2}\sigma''\right).$$

On a donc

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{B_n}{B_{n+1}} \frac{\tau' + \frac{n-1}{2}\sigma''}{\left(\tau' + \frac{2n-1}{2}\sigma''\right)(\tau' + n\sigma'')}.$$

Le coefficient $b_n$ s'obtient en identifiant les coefficients de $x^{n-1}$ dans l'équation aux différences pour $y_n(x)$ :

$$\frac{b_n}{a_n} = n\frac{\tau_{n-1}(0)}{\tau'_{n-1}} - \frac{n(n-1)}{2} = n\frac{\tau(0) + (n-1)\sigma'(0) + \frac{1}{2}(n-1)\tau'}{\tau' + (n-1)\sigma''}.$$

Aussi

$$\beta_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{\tau(0)(\sigma'' - \tau') - n[\tau' + 2\sigma'(0)]\left(\tau' + \frac{n-1}{2}\sigma''\right)}{[\tau' + (n-1)\sigma''](\tau' + n\sigma'')}.$$

Le calcul du coefficient $\gamma_n$ dans la relation de récurrence (27) se réduit à celui du carré de la norme $d_n^2$, car

$$\gamma_n = \alpha_{n-1}\frac{d_n^2}{d_{n-1}^2}.$$

Pour calculer $d_n^2$, il est commode de faire intervenir la formule de Rodrigues (22):

$$d_n^2=\sum_i \rho(x_i)\, y_n^2(x_i)=B_n \sum_i y_n(x_i)\, \nabla^n[\rho_n(x_i)].$$

En appliquant la formule de sommation par parties (7), on obtient

$$d_n^2=B_n \sum_i y_n(x_i)\, \Delta\, [\nabla^{n-1}\rho_n(x_i-1)]=$$
$$=B_n\{y_n(x_i)\, \nabla^{n-1}\rho_n(x_i-1)\,|_a^b-\sum_i \Delta y_n(x_i)\, \nabla^{n-1}\rho_n(x_i)\}.$$

Le premier terme dans l'accolade s'annule en vertu de la condition (25), car on a d'après la formule de Rodrigues (20)

$$\nabla^{n-1}\rho_n(x_i-1)=\frac{1}{A_{1n}B_n}\sigma(x_i)\, \rho(x_i)\, \nabla y_n(x_i).$$

D'où

$$d_n^2=-B_n \sum_i \Delta y_n(x_i)\, \nabla^{n-1}\rho_n(x_i).$$

En faisant $n$ fois la sommation par parties, on obtient finalement

$$d_n^2=(-1)^n B_n \sum_i \Delta^n y_n(x_i)\, \rho_n(x_i)=(-1)^n B_n a_n n! \sum_i \rho_n(x_i).$$

Le calcul de la somme $\sum\limits_i \rho_n(x_i)$ est particulièrement simple dans le cas des polynômes de Meixner, de Krawtchouk et de Charlier. On a pour ces polynômes

$$\sigma(x)=x,$$

$$\rho_n(x)=\rho(x+n)\prod_{k=1}^{n}\sigma(x+k)=\rho(x+n)\frac{\Gamma(1+x+n)}{\Gamma(1+x)}.$$

Il vient donc pour les polynômes de Meixner

$$\sum_i \rho_n(x_i)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\mu^{i+n}\Gamma(\gamma+i+n)}{i!\,\Gamma(\gamma)}.$$

Puisqu'on a d'après la formule de Taylor pour $|\mu|<1$

$$(1-\mu)^{-(\gamma+n)}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\gamma+i+n)}{\Gamma(\gamma+n)}\frac{\mu^i}{i!},$$

il vient définitivement pour les polynômes $m_n^{(\gamma,\mu)}(x)$

$$d_n^2=\frac{n!\,(\gamma)_n}{\mu^n(1-\mu)^\gamma}.$$

Pour les polynômes de Krawtchouk on a

$$\sum_i \rho_n(x_i)=\sum_{i=0}^{N}\frac{N!\,p^{i+n}q^{N-i-n}}{i!\,\Gamma(N+1-i-n)}=$$

$$=\frac{N!p^n}{(N-n)!}\sum_{i=0}^{N-n}C^i_{N-n}p^iq^{N-n-i}=\frac{N!\,p^n}{(N-n)!},$$

d'où

$$d_n^2=C_N^n(pq)^n.$$

Pour les polynômes de Charlier

$$\sum_i \rho_n(x_i)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{e^{-\mu}\mu^{i+n}}{i!}=\mu^n,$$

d'où

$$d_n^2=\frac{n!}{\mu^n}.$$

Calculons maintenant $\sum\limits_i \rho_n(x_i)$ pour les polynômes de Hahn $h_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ pour $\alpha>-1$, $\beta>-1$. On a dans ce cas

$$\sigma(x)=x(N+\alpha-x),$$

$$\rho(x)=\frac{\Gamma(\beta+1+x)\,\Gamma(N+\alpha-x)}{\Gamma(1+x)\,\Gamma(N-x)},$$

$$\rho_n(x)=\frac{\Gamma(\beta+1+x+n)\,\Gamma(N+\alpha-x-n)}{\Gamma(1+x+n)\,\Gamma(N-x-n)}\prod_{k=1}^{n}(x+k)(N+\alpha-x-k)=$$

$$=\frac{\Gamma(\beta+1+x+n)\,\Gamma(N+\alpha-x)}{\Gamma(1+x)\,\Gamma(N-x-n)},$$

d'où

$$\sum_{i=0}^{N-1}\rho_n(x_i)=\frac{1}{(N-n-1)!}\sum_{i=0}^{N-n-1}C^i_{N-n-1}\Gamma(\beta+1+i+n)\,\Gamma(N+\alpha-i).$$

Pour calculer la somme, nous ferons intervenir la relation (voir Appendice A, n°1)

$$\Gamma(x)\,\Gamma(y)=\Gamma(x+y)\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt.$$

On obtient

$$\sum_i \rho_n(x_i) =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1+n+N)}{(N-n-1)!} \sum_{i=0}^{N-n-1} C_{N-n-1}^i \int_0^1 t^{\beta+i+n}(1-t)^{N+\alpha-i-1}\,dt =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1+n+N)}{(N-n-1)!} \int_0^1 t^{\beta+n}(1-t)^{\alpha+n} \times$$

$$\times \left[\sum_{i=0}^{N-n-1} C_{N-n-1}^i t^i (1-t)^{N-n-1-i}\right] dt =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1+n+N)}{(N-n-1)!} \int_0^1 t^{\beta+n}(1-t)^{\alpha+n}\,dt =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1+n+N)\,\Gamma(\beta+1+n)\,\Gamma(\alpha+n+1)}{(N-n-1)!\,\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}.$$

D'où l'on déduit pour les polynômes $h_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, en prenant $\alpha > -1$, $\beta > -1$:

$$d_n^2 = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+1+n)\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1+N)}{(\alpha+\beta+2n+1)\,n!\,(N-n-1)!\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}.$$

On a en particulier pour les polynômes de Tchébychev $t_n(x)$ d'une variable discrète, en posant $\alpha = 0$, $\beta = 0$,

$$d_n^2 = \frac{(N+n)!}{(2n+1)(N-n-1)!}.$$

Dans le cas des polynômes $h_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ avec $\alpha < 1-N$ et $\beta < 1-N$, la somme $\sum_i \rho_n(x_i)$ se calcule en faisant le prolongement analytique suivant $\alpha$ et $\beta$ de la somme correspondante pour $\alpha > -1$ et $\beta > -1$. En effet, on a dans ce cas

$$\rho_n(x) = \frac{\prod_{k=1}^{n}(x+k)(N+\alpha-x-k)}{\Gamma(1+x+n)\,\Gamma(1-\alpha-N+x+n)\,\Gamma(-\beta-x-n)\,\Gamma(N-x-n)} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{\Gamma(1+x)\,\Gamma(x+1-N-\alpha)\,\Gamma(-\beta-x-n)\,\Gamma(N-x-n)}.$$

A l'aide de la formule de complément de la fonction gamma, on peut mettre l'expression pour $\sum_i \rho_n(x_i)$ sous la forme

$$\sum_{i=0}^{N-1} \rho_n(x_i) = \frac{1}{(N-n-1)!} \sum_{i=0}^{N-n-1} \frac{(-1)^n}{\pi^2} \times$$

$$\times \sin \pi (N+\alpha-i) \sin \pi (n+\beta+1+i).$$

$$C_{N-n-1}^i \Gamma(N+\alpha-i)\,\Gamma(n+\beta+1+i) =$$

$$= \frac{(-1)^{N-1}}{\pi^2} \frac{\sin \pi\alpha \sin \pi\beta}{(N-n-1)!} \sum_{i=0}^{N-n-1} C_{N-n-1}^i \Gamma(n+\alpha-i)\,\Gamma(n+\beta+1+i).$$

On a montré plus haut que pour $\alpha > -1$, $\beta > -1$ on a l'égalité

$$\sum_{i=0}^{N-n-1} C_{N-n-1}^i \Gamma(N+\alpha-i)\,\Gamma(n+\beta+1+i) =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1+n+N)\,\Gamma(\beta+1+n)\,\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}.$$

D'après le principe du prolongement analytique, cette relation reste vraie pour $\alpha$ et $\beta$ quelconques. On obtient donc, à l'aide de la formule de complément de la fonction gamma,

$$\sum_i \rho_n(x_i) = \frac{(-1)^{N-1}}{\pi^2} \sin \pi\alpha \sin \pi\beta \times$$

$$\times \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1+n+N)\,\Gamma(\beta+1+n)\,\Gamma(\alpha+n+1)}{(N-n-1)!\,\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)} =$$

$$= \frac{\Gamma(-\alpha-\beta-2n-1)}{(N-n-1)!\,\Gamma(-\alpha-\beta-n-N)\,\Gamma(-\beta-n)\,\Gamma(-\alpha-n)},$$

d'où

$$d_n^2 = \frac{(-\alpha-\beta-n-N)_N}{(-\alpha-\beta-2n-1)\,n!\,(N-n-1)!\,\Gamma(-\alpha-n)\,\Gamma(-\beta-n)}.$$

Nous donnons en conclusion les caractéristiques principales des polynômes orthogonaux classiques d'une variable discrète, résumées dans les deux tableaux *3a* et *3b*.

**6. Lien avec les polynômes de Jacobi, de Laguerre et d'Hermite.** Il est naturel de s'attendre à ce que, pour $h \to 0$, les solutions polynomiales de l'équation (2) deviennent, avec une normalisation appropriée, des solutions polynomiales de l'équation (1), i. e. des polynômes de Jacobi, de Laguerre et d'Hermite. Cette conjecture se démontre sans peine par récurrence, en effectuant un passage à la limite correspondant dans les relations de récurrence (27) pour les

*Tableau 3a*

**Caractéristiques principales des polynômes de Hahn et des polynômes de Tchébychev d'une variable discrète**

| $y_n(x)$ | $h_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ | $t_n(x)$ |
|---|---|---|
| $]a, b[$ | $(0, N)$ | $(0, N)$ |
| $\rho(x)$ | 1) $\dfrac{\Gamma(\beta+1+x)\,\Gamma(N+\alpha-x)}{\Gamma(1+x)\,\Gamma(N-x)}$ $(\alpha>-1,\ \beta>-1)$<br>2) $\dfrac{1}{\Gamma(1+x)\,\Gamma(1-\alpha-N+x)\,\Gamma(-\beta-x)\,\Gamma(N-x)}$ $(\alpha<1-N,\ \beta<1-N)$ | $1$ |
| $\sigma(x)$<br>$\tau(x)$<br>$\lambda_n$ | $x(N+\alpha-x)$<br>$-(\alpha+\beta+2)\,x+(\beta+1)(N-1)$<br>$n(\alpha+\beta+n+1)$ | $x(N-x)$<br>$-2x+N-1$<br>$n(n+1)$ |
| $B_n$<br>$a_n$<br>$b_n$ | $\dfrac{(-1)^n}{n!}$<br>$\dfrac{1}{n!}(\alpha+\beta+n+1)_n$<br>$-\dfrac{1}{(n-1)!}\Big[(\beta+1)(N-1)+$ $+\dfrac{n-1}{2}(\alpha-\beta+2N-2)\Big](\alpha+\beta+n+1)_{n-1}$ | $\dfrac{(-1)^n}{n!}$<br>$\dfrac{1}{n!}(n+1)_n$<br>$-\dfrac{N-1}{(n-1)!}(n)_n$ |
| $d_n^2$ | 1) $\dfrac{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)\,(\alpha+\beta+n+1)_N}{(\alpha+\beta+2n+1)\,n!\,(N-n-1)!}$ $(\alpha>-1,\ \beta>-1)$<br>2) $\dfrac{(-\alpha-\beta-n-N)_N}{(-\alpha-\beta-2n-1)\,n!\,(N-n-1)!\times\Gamma(-\alpha-n)\,\Gamma(-\beta-n)}$ $(\alpha<1-N,\ \beta<1-N)$ | $\dfrac{(N+n)!}{(2n+1)(N-n-1)!}$ |
| $\alpha_n$<br>$\beta_n$<br>$\gamma_n$ | $\dfrac{(n+1)(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)}$<br>$\dfrac{(\beta+1)(\alpha+\beta)(N-1)+n(\alpha+\beta+n+1)(\alpha-\beta+2N-2)}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+2)}$<br>$\dfrac{(n+\alpha)(n+\beta)\cdot(N-n)(N+n+\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+1)}$ | $\dfrac{n+1}{2(2n+1)}$<br>$\dfrac{1}{2}(N-1)$<br>$\dfrac{n(N^2-n^2)}{2(2n+1)}$ |

*Tableau 3b*

**Caractéristiques principales des polynômes de Meixner, de Krawtchouk et de Charlier**

| $y_n(x)$ | $m_n^{(\gamma,\mu)}(x)$ | $k_n^{(p)}(x)$ | $c_n^{(\mu)}(x)$ |
|---|---|---|---|
| $]a, b[$ | $(0, \infty)$ | $(0, N+1)$ | $(0, \infty)$ |
| $\rho(x)$ | $\dfrac{\mu^x \Gamma(\gamma+x)}{\Gamma(1+x)\Gamma(\gamma)}$ $(\gamma>0,\ 0<\mu<1)$ | $\dfrac{N!p^x q^{N-x}}{\Gamma(1+x)\Gamma(N+1-x)}$ $(p>0,\ q>0,\ p+q=1)$ | $\dfrac{e^{-\mu}\mu^x}{\Gamma(1+x)}$ $(\mu>0)$ |
| $\sigma(x)$ | $x$ | $x$ | $x$ |
| $\tau(x)$ | $\gamma\mu - x(1-\mu)$ | $\dfrac{1}{q}(Np-x)$ | $\mu - x$ |
| $\lambda_n$ | $n(1-\mu)$ | $\dfrac{n}{q}$ | $n$ |
| $B_n$ | $\dfrac{1}{\mu^n}$ | $\dfrac{(-1)^n q^n}{n!}$ | $\dfrac{1}{\mu^n}$ |
| $a_n$ | $\left(\dfrac{\mu-1}{\mu}\right)^n$ | $\dfrac{1}{n!}$ | $\dfrac{1}{(-\mu)^n}$ |
| $b_n$ | $n\left(\gamma+\dfrac{n-1}{2}\dfrac{\mu+1}{\mu}\right)\times$ $\times\left(\dfrac{\mu-1}{\mu}\right)^{n-1}$ | $-\dfrac{Np+(n-1)\left(\dfrac{1}{2}-p\right)}{(n-1)!}$ | $\dfrac{n\left(1+\dfrac{n-1}{2\mu}\right)}{(-\mu)^{n-1}}$ |
| $d_n^2$ | $\dfrac{n!(\gamma)_n}{\mu^n(1-\mu)^\gamma}$ | $\dfrac{N!}{n!(N-n)!}(pq)^n$ | $\dfrac{n!}{\mu^n}$ |
| $\alpha_n$ | $\dfrac{\mu}{\mu-1}$ | $n+1$ | $-\mu$ |
| $\beta_n$ | $\dfrac{n+\mu(n+\gamma)}{1-\mu}$ | $n+p(N-2n)$ | $n+\mu$ |
| $\gamma_n$ | $\dfrac{n(n-1+\gamma)}{\mu-1}$ | $pq(N-n+1)$ | $-n$ |

polynômes en question. A titre d'exemple, nous allons établir une relation limite entre les polynômes de Hahn et ceux de Jacobi.

Faisons tout d'abord un changement linéaire $x = \frac{N}{2}(1+s)$ afin de passer de l'intervalle d'orthogonalité $]0, N[$ des polynômes de Hahn à l'intervalle $]-1, 1[$. L'équation aux différences (3) pour les polynômes $h_n^{(\alpha,\beta)}(x) = u(s)$ devient alors

$$(1+s)(1-s+\alpha h)\frac{u(s+h)-2u(s)+u(s-h)}{h^2} - \\ -[(\alpha+\beta+2)s+\alpha-\beta+(\beta+1)h]\frac{u(s+h)-u(s)}{h} + \\ +n(n+\alpha+\beta+1)u(s)=0, \qquad (35)$$

où $h = \frac{2}{N}$.

Quand $h \to 0$, l'équation (35) se transforme formellement en équation différentielle pour les polynômes de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(s)$. On suppose donc que la relation limite s'écrira sous la forme

$$\lim_{N\to\infty} C_n(N)\, h_n^{(\alpha,\beta)}\left[\frac{N}{2}(1+s)\right] = P_n^{(\alpha,\beta)}(s), \qquad (36)$$

où $C_n(N)$ est un facteur de normalisation.

Pour démontrer la relation (36) et justifier le choix du facteur de normalisation $C_n(N)$, nous comparerons les relations de récurrence pour $P_n^{(\alpha,\beta)}(s)$ et $v_n(s, N) = C_n(N)\, h_n^{(\alpha,\beta)}\left[\frac{N}{2}\left(1+s\right)\right]$:

$$sP_n^{(\alpha,\beta)}(s) = \frac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(s) + \\ + \frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}P_n^{(\alpha,\beta)}(s) + \\ + \frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(s);$$

$$sv_n = \frac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}\frac{C_n}{NC_{n+1}}v_{n+1} + \\ + \frac{\beta^2-\alpha^2+\frac{2}{N}[n(n+\alpha+\beta+1)(\alpha-\beta-2)-(\beta+1)(\alpha+\beta)]}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}v_n + \\ + \frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left(1+\frac{n+\alpha+\beta}{N}\right)\frac{NC_n}{C_{n-1}}v_{n-1}.$$

On voit que la relation (36) reste vraie pour $n$ quelconque si elle l'est pour $n = 0$, $n = 1$ et si l'on a en plus $C_n/C_{n+1} = N$. On choisira donc $C_n = N^{-n}$.

On aboutit à la relation limite suivante :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^n} h_n^{(\alpha,\beta)}\left[\frac{N}{2}(1+s)\right] = P_n^{(\alpha,\beta)}(s). \tag{37}$$

Dans le cas particulier des polynômes de Tchébychev d'une variable discrète $t_n(x)$, la relation (37) s'écrit

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^n} t_n\left[\frac{N}{2}(1+s)\right] = P_n(s), \tag{38}$$

où $P_n(s)$ est un polynôme de Legendre.

D'une façon analogue, en posant dans l'équation pour les polynômes de Meixner $m_n^{(\gamma,\mu)}(x)$

$$x = Ns, \quad y(x) = u(s), \quad h = \frac{1}{N}, \quad 1-\mu = \frac{\lambda}{N},$$

on retrouve une équation aux différences du type (2) qui, pour $N \to \infty$ et une valeur fixe de $\lambda$, se transforme formellement en équation différentielle

$$su'' + (\gamma - \lambda s)u' + n\lambda u = 0.$$

Les solutions polynomiales de cette équation sont du type $L_n^{\gamma-1}(\lambda s)$. On suppose donc que la relation limite s'écrira comme suit :

$$\lim_{N\to\infty} C_n(N)\, m_n^{\left(\gamma,\, 1-\frac{\lambda}{N}\right)}\left(\frac{Nt}{\lambda}\right) = L_n^{\gamma-1}(t).$$

Ici $C_n$ est un facteur de normalisation que l'on choisira à partir des considérations analogues à celles utilisées pour la relation (37). Il vient donc $C_n = \frac{1}{n!}$, d'où

$$\lim_{\beta\to 0} \frac{1}{n!} m_n^{(1+\alpha,\, 1-\beta)}\left(\frac{t}{\beta}\right) = L_n^{\alpha}(t) \tag{39}$$

$\left(\text{en posant } \beta = \frac{\lambda}{N}\right)$.

Déduisons maintenant la relation limite pour les polynômes de Krawtchouk $k_n^{(p)}(x)$. A cet effet, nous nous baserons sur le théorème limite de la distribution binomiale bien connu du calcul des probabilités. On a en vertu de ce théorème pour $N \to \infty$

$$\rho(x_i) = C_N^i p^i q^{N-i} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}} \exp\left[-\frac{(i-Np)^2}{2Npq}\right],$$

i. e. le poids $\rho(x)$ pour $x = x_i = i$ dans le cas des polynômes de Krawtchouk se transforme, à un facteur de normalisation près, en le poids pour les polynômes d'Hermite $\rho(s) = e^{-s^2}$ avec $s = \frac{x-Np}{\sqrt{2Npq}}$.

Nous poserons donc dans l'équation pour les polynômes de Krawtchouk

$$x = Np + \sqrt{2Npq}\, s, \quad y(x) = u(s), \quad h = \frac{1}{\sqrt{2Npq}}.$$

L'équation pour les polynômes de Krawtchouk s'écrira alors comme suit :

$$\left(1 + \sqrt{\frac{2q}{Np}}\, s\right) \frac{u(s+h) - 2u(s) + u(s-h)}{h^2} - \\ - 2s\, \frac{u(s+h) - u(s)}{h} + 2nu(s) = 0.$$

Quand $N \to \infty$, cette équation se transforme formellement en équation différentielle

$$u'' - 2su' + 2nu = 0$$

qui admet des polynômes d'Hermite $H_n(s)$ comme solutions polynomiales. En répétant les raisonnements qui nous ont conduits aux relations limites (37) à (39), nous obtiendrons

$$\lim_{N \to \infty} \left(\frac{2}{Npq}\right)^{\frac{n}{2}} n!\, k_n^{(p)}(Np + \sqrt{2Npq}\, s) = H_n(s). \tag{40}$$

Le lecteur trouvera dans [1] des renseignements plus détaillés sur les polynômes d'une variable discrète.

**7. Fonctions sphériques généralisées et polynômes de Krawtchouk.** Montrons qu'il existe entre les fonctions sphériques généralisées et les polynômes de Krawtchouk une relation qui découle directement de la propriété d'unitarité des fonctions sphériques généralisées. Pour établir cette relation, servons-nous de la formule (20) du § 10 et de l'expression explicite des fonctions sphériques généralisées à l'aide des polynômes de Jacobi. On a

$$\sum_{m'=-l}^{l} d^l_{mm'}(\beta)\, d^l_{m_1 m'}(\beta) = \delta_{mm_1}, \tag{41}$$

où

$$d^l_{mm'}(\beta) = \frac{1}{2^m} \sqrt{\frac{(l+m)!\,(l-m)!}{(l+m')!\,(l-m')!}}\,(1-\cos\beta)^{\frac{m-m'}{2}} \times \\ \times (1+\cos\beta)^{\frac{m+m'}{2}} P_{l-m}^{(m-m',\, m+m')}(\cos\beta). \tag{42}$$

Pour élucider la nature de la dépendance de la fonction $d^l_{mm'}(\beta)$ par rapport à $m'$ pour des valeurs fixées de $l$, $m$ et $\beta$, faisons appel à la formule de Rodrigues pour les polynômes de Jacobi (voir § 5). En appliquant la formule de Leibniz de calcul des dérivées d'un

produit de fonctions, on s'assure facilement que pour des $n$ et $x$ fixes, le polynôme de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ est un polynôme en $\alpha$ et $\beta$, et la somme des puissances de plus haut degré de $\alpha$ et $\beta$ est égale à $n$. Dans notre cas $\alpha$ et $\beta$ dépendent linéairement de $m'$. On a donc

$$d^l_{mm'}(\beta) = \frac{1}{\sqrt{(l+m')!\,(l-m')!}} \left(\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}\right)^{\frac{l-m'}{2}} q_{l-m}(l-m'), \quad (43)$$

où $q_n(x)$ est un polynôme de degré $n$ en $x$. La relation d'orthogonalité (41) se laisse donc écrire sous la forme

$$\sum_x q_{l-m}(x)\, q_{l-m_1}(x)\, \rho(x) = \delta_{mm_1}, \quad (44)$$

la somme étant prise sur tous les $x = 0, 1, \ldots, 2l$,

$$\rho(x) = \frac{1}{x!\,(2l-x)!} \left(\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}\right)^x .$$

La relation (44) exprime l'orthogonalité des polynômes $q_n(x)$, avec le poids $\rho(x)$, sur l'ensemble discret de points $x = 0, 1, \ldots$ $\ldots, 2l$. On voit aisément que le poids $\rho(x)$ se confond, à un facteur constant près, avec le poids par rapport auquel sont orthogonaux, sur le même ensemble de points $x$, les polynômes de Krawtchouk $k_n^{(p)}(x, N)$ pour $\frac{p}{1-p} = \frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}$, $N = 2l$.

En vertu de l'unicité du système de polynômes orthogonaux par rapport à un poids donné, le polynôme $q_n(x)$ se confond donc, à un facteur qui ne dépend pas de $x$ près, avec le polynôme de Krawtchouk $k_n^{(p)}(x, N)$ pour $p = \sin^2\frac{\beta}{2}$, $N = 2l$. Ainsi donc, on déduit de la relation (43)

$$d^l_{mm'}(\beta) = C\sqrt{\rho(x)}\, k_n^{(p)}(x, N), \quad (45)$$

où $x = l - m'$, $n = l - m$, $N = 2l$, $p = \sin^2\frac{\beta}{2}$,

$$\rho(x) = C_{2l}^x p^x (1-p)^{2l-x}.$$

La constante de normalisation $C = C(l, m, \beta)$ se laisse définir, au signe près, à partir de la relation (41) pour $m = m_1$:

$$C^2 d_n^2 = 1$$

($d_n^2$ est le carré de la norme pour les polynômes de Krawtchouk). Pour connaître le signe de $C$ il suffit de déterminer le signe de la puissance supérieure de $m'$ dans les deux membres de la relation (45), en se servant de l'expression (42) de $d^l_{mm'}(\beta)$, ce qui donne $C > 0$.

On obtient en définitive la relation suivante entre les fonctions sphériques généralisées et les polynômes de Krawtchouk:

$$d^l_{mm'}(\beta) = \frac{1}{d_n}\sqrt{\rho(x)}\, k_n^{(p)}(x, N), \quad (46)$$

où

$$x = l - m',\ n = l - m,\ N = 2l,\ p = \sin^2 \frac{\beta}{2},$$

$$\rho(x) = C_{2l}^{x} p^{x} (1 - p)^{2l-x}.$$

**8. Application des polynômes orthogonaux classiques d'une variable discrète à la compression de l'information.** Le problème de stockage de l'information revêt une importance scientifique et technique de premier plan. Une question liée à ce problème, celle de présentation de l'information sous une forme condensée, se pose, par exemple lors du traitement des électrocardiogrammes, du dépouillement des observations aériennes, etc.

A l'heure actuelle, on utilise largement dans ce but des méthodes spectrales de traitement de l'information. Elles consistent en ce qui suit. Au lieu de retenir la table complète des valeurs de la fonction $f(t)$ caractérisant le signal, on retient seulement quelques premiers coefficients de Fourier $C_n$ du développement de la fonction suivant un système complet de fonctions orthogonales $y_n(t)$ $(n = 0, 1, \ldots)$:

$$f(t) = \sum_n C_n y_n(t), \quad C_n = \frac{1}{d_n^2} (f(t), y_n(t)),$$

où $(f, g)$ est le produit scalaire de deux fonctions,

$$(y_n, y_m) = d_n^2 \delta_{mn}, \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ 1 & (m = n). \end{cases} \tag{47}$$

On considère généralement les cas où le produit scalaire de deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ a la forme d'une intégrale:

$$f(g) = \int_a^b f(t)\, g(t)\, \rho(t)\, dt,$$

où $\rho(t) \geqslant 0$ est le poids par rapport auquel les fonctions $y_n(t)$ sont orthogonales (voir p. ex. § 8). Or, si la fonction $f(t)$ est définie par ses valeurs tabulaires $f(t_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, N - 1)$, il est plus commode de calculer les coefficients $C_n$ en choisissant des systèmes de fonctions orthogonales $y_n(t)$ dont le produit scalaire a la forme d'une somme:

$$(f, g) = \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i)\, g(t_i)\, \rho_i. \tag{48}$$

Or, la condition d'orthogonalité (47) et la forme (48) du produit scalaire ont justement lieu dans le cas des polynômes orthogonaux classiques d'une variable discrète; pour cette raison on les utilise souvent pour la compression de l'information.

A titre d'exemple, nous décrirons les résultats de l'application des polynômes de Tchébychev $t_n(x)$ au traitement des électrocardiogrammes. (Notre exemple est tiré des Comptes rendus du 1er Colloque national sur les Méthodes spectrales de traitement de l'information dans les recherches scientifiques, Pouchtchino, 1980, pp. 21, 105.)

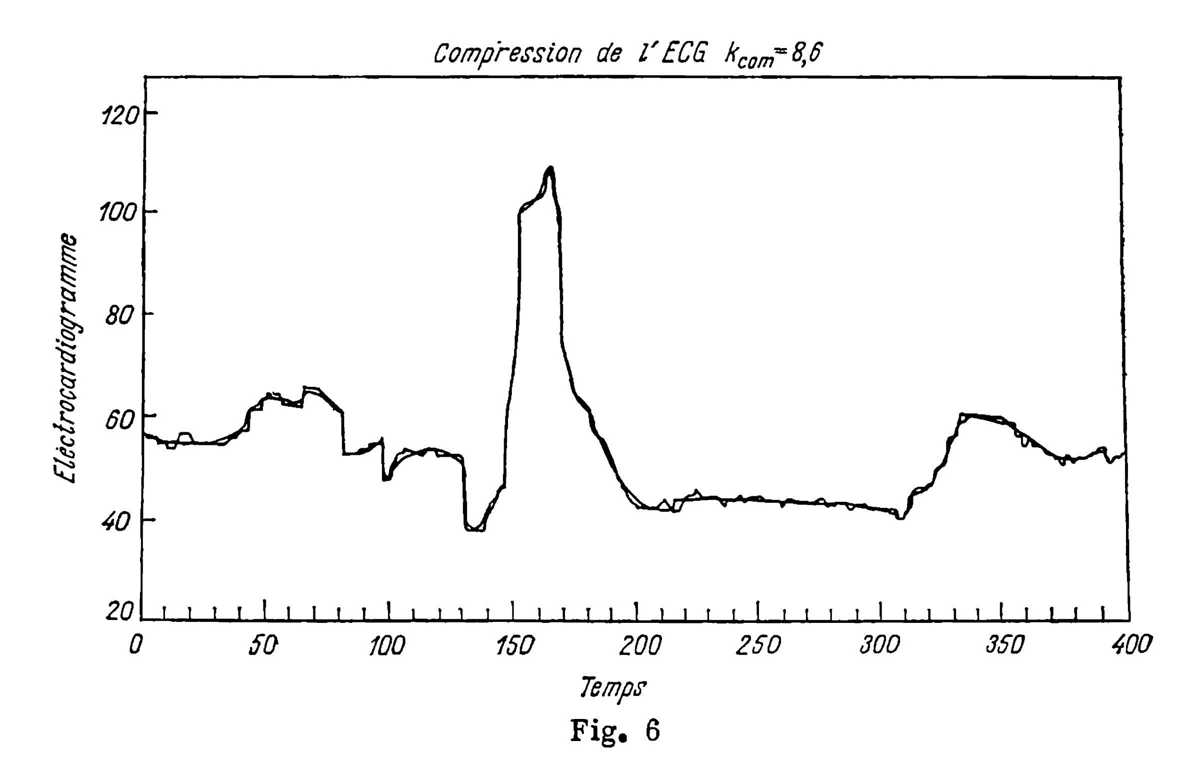



Fig. 6

Pour la reproduction du signal, la courbe $f(t)$ a été divisée en portions; pour chaque portion, on n'a retenu que trois premiers termes du développement de la fonction $f(t)$ suivant les polynômes de Tchébychev. La longueur de chaque portion a été choisie de telle façon que l'erreur moyenne quadratique soit inférieure à 1%. Même un algorithme aussi simple s'est avéré suffisamment efficace : le taux de compression de l'information était compris entre 6 et 12. On voit sur la figure 6 un fragment d'électrocardiogramme initial et reconstruit.

CHAPITRE III

# FONCTIONS CYLINDRIQUES

## § 13. Equation différentielle de Bessel et sa solution

**1. Résolution de l'équation d'Helmholtz en coordonnées cylindriques.** Parmi les fonctions spéciales, les fonctions cylindriques sont peut-être les plus répandues. On les rencontre très souvent dans les problèmes liés à la résolution de l'*équation d'Helmholtz*

$$\Delta v + \lambda v = 0$$

en coordonnées cylindriques. Pour simplifier les choses, supposons que la fonction $v$ soit indépendante des distances mesurées parallèlement à l'axe du cylindre. On a alors $v = v(r, \varphi)$ et

$$\Delta v + \lambda v = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda v = 0. \tag{1}$$

Pour être univoque, la fonction $v$ doit vérifier la condition de périodicité $v(r, \varphi + 2\pi) = v(r, \varphi)$. Développons-la en série de Fourier :

$$v(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n(r) e^{in\varphi},$$

où

$$v_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(r, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi. \tag{2}$$

L'équation différentielle pour la fonction $v_n(r)$ s'obtient sans difficulté en intégrant l'équation (1) sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$ avec un poids $e^{-in\varphi}$ et en simplifiant le terme en $\partial^2 v/\partial\varphi^2$ par double intégration par parties. Puisque la fonction $v(r, \varphi)$ est périodique relativement à la variable $\varphi$, les termes hors intégrale s'annulent, et nous obtenons l'équation différentielle pour la fonction $u(z) = v_n(r)$, où $z = \sqrt{\lambda} r$ :

$$z^2 u'' + z u' + (z^2 - n^2) u = 0.$$

Dans le texte qui suit, nous discuterons une équation plus générale :

$$z^2u'' + zu' + (z^2 - \nu^2)\, u = 0 \tag{3}$$

dans laquelle $z$ est une variable complexe et $\nu$ un paramètre susceptible de prendre toute valeur réelle ou complexe.

Les solutions arbitraires de (3) sont appelées *fonctions cylindriques d'ordre* $\nu$ ou *fonctions de Bessel*, et l'équation (3), *équation de Bessel*.

Par changement de variables dans l'équation de Bessel, on obtient une série d'autres équations différentielles, en particulier *l'équation de Lommel* largement utilisée dans les applications :

$$v'' + \frac{1-2\alpha}{\xi}\, v' + \left[ (\beta\gamma\xi^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - \nu^2\gamma^2}{\xi^2} \right] v = 0 \tag{4}$$

dont la solution s'écrit

$$v(\xi) = \xi^{\alpha} u_{\nu}(\beta\xi^{\gamma}).$$

Ici $u_\nu(z)$ est une fonction cylindrique d'ordre $\nu$, tandis que $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont des constantes.

**2. Définition des fonctions de Bessel de première espèce et des fonctions de Hankel.** L'équation généralisée du type hypergéométrique (1) du § 1 comporte comme cas particulier l'équation de Bessel (3) avec $\sigma(z) = z$, $\tilde{\tau}(z) = 1$, $\tilde{\sigma}(z) = z^2 - \nu^2$. En ramenant (3) à une équation du type hypergéométrique, la fonction $\varphi(z)$ peut prendre, conformément au choix des signes dans la formule (11) du § 1 pour $\pi(z)$ et au choix des valeurs à donner à $k$, des valeurs égales à $z^{\pm\nu}e^{\pm iz}$. Soit par exemple $\varphi(z) = z^{\nu}e^{iz}$. En posant $u(z) = \varphi(z)\, y(z)$, on obtient une équation du type hypergéométrique

$$\sigma(z)\, y'' + \tau(z)\, y' + \lambda y = 0, \tag{3a}$$

où

$$\sigma(z) = z, \qquad \tau(z) = 2iz + 2\nu + 1, \qquad \lambda = i(2\nu + 1).$$

D'après le théorème 1 du § 3, l'équation (3a) admet une solution particulière de la forme

$$y(z) = \frac{C_\mu}{\rho(z)} \int_C \frac{\sigma^{\mu}(s)\, \rho(s)}{(s-z)^{\mu+1}}\, ds,$$

où $C_\mu$ est une constante de normalisation et la fonction $\rho(z)$ est solution de l'équation différentielle

$$[\sigma(z)\, \rho(z)]' = \tau(z)\, \rho(z);$$

$\mu$ est racine de l'équation

$$\lambda + \mu\tau' + \frac{1}{2}\mu(\mu - 1)\, \sigma'' = 0$$

(nous avons utilisé les formules (2) et (3) du § 3 où, afin d'éviter toute confusion, nous avons changé $\nu$ en $\mu$, car la notation $\nu$ a déjà été employée dans l'équation de Bessel initiale).

Le contour $C$ est choisi de façon à satisfaire à la condition

$$\left.\frac{\sigma^{\mu+1}(s)\,\rho(s)}{(s-z)^{\mu+2}}\right|_{s_1,\ s_2}=0.$$

Dans le cas considéré on a

$$\mu=-\nu-\frac{1}{2},\qquad \rho(z)=z^{2\nu}e^{2iz}.$$

Aussi la solution particulière de l'équation de Bessel admet-elle l'écriture

$$u_\nu(z)=\varphi(z)\,y(z)=a_\nu z^{-\nu}e^{-iz}\int\limits_C[s(z-s)]^{\nu-1/2}e^{2is}\,ds, \tag{5}$$

où $a_\nu$ est une constante de normalisation et le contour $C$ satisfait à la condition

$$s^{\nu+1/2}(z-s)^{\nu-3/2}e^{2is}\,|_{s_1,\ s_2}=0.$$

Soit $z>0$ et $\operatorname{Re}\nu>3/2$. On pourra choisir alors comme extrémités du contour $C$ les points $s_1=0$ et $s_2=z$. Le contour $C$ pourra en outre s'éloigner à l'infini de telle sorte que $\operatorname{Im} s\to+\infty$. Comme $C$, nous choisirons des contours $C_0$, $C_1$, $C_2$ tels qu'on les voit sur la figure 7. Ils nous donneront alors les trois solutions suivantes de l'équation de Bessel:

$$u_\nu^{(0)}(z)=\alpha_\nu z^{-\nu}e^{-iz}\int\limits_{C_0}[s(z-s)]^{\nu-1/2}e^{2is}\,ds, \tag{6}$$

$$u_\nu^{(1)}(z)=a_\nu^{(1)}z^{-\nu}e^{-iz}\int\limits_{C_1}[s(z-s)]^{\nu-1/2}\,e^{2is}\,ds, \tag{7}$$

$$u_\nu^{(2)}(z)=a_\nu^{(2)}z^{-\nu}e^{-iz}\int\limits_{C_2}[s(z-s)]^{\nu-1/2}e^{2is}\,ds. \tag{8}$$



Fig. 7

Pour s'établir sans ambiguïté sur une branche déterminée de la fonction $[s(z-s)]^{\nu-1/2}$, on posera $|\arg s(z-s)|<\pi$. Il est commode de donner aux contours $C_0$, $C_1$, $C_2$ la représentation paramétrique

$$s=z(1+t)/2\qquad(-1\leqslant t\leqslant 1),$$

$$s=z(1+it/2)\qquad(0\leqslant t<\infty),$$

$$s=izt/2\qquad(0\leqslant t<\infty).$$

Les formules (6) à (8) s'écriront alors

$$u_\nu^{(0)}(z) = \frac{a_\nu}{2^{2\nu}} z^\nu \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\nu-1/2} e^{izt}\, dt =$$

$$= \frac{a_\nu}{2^{2\nu}} z^\nu \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\nu-1/2} \cos zt\, dt, \qquad (9)$$

$$u_\nu^{(1)}(z) = -\frac{a_\nu^{(1)}}{\sqrt{2}} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu e^{i\left(z-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{\nu-1/2} \left(1+\frac{it}{2}\right)^{\nu-1/2} dt, \qquad (10)$$

$$u_\nu^{(2)}(z) = \frac{a_\nu^{(2)}}{\sqrt{2}} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu e^{-i\left(z-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{\nu-1/2} \left(1-\frac{it}{2}\right)^{\nu-1/2} dt. \qquad (11)$$

Conformément à la condition $|\arg s(z-s)| < \pi$, la valeur de $\arg(1 \pm it/2)$ dans (10) et (11) sera choisie la plus petite en module.

Si l'on prend, dans (10) et (11), les constantes de normalisation réelles, avec par ailleurs $a_\nu^{(2)} = -a_\nu^{(1)}$, alors pour des $z$ et $\nu$ réels les fonctions $u_\nu^{(1)}(z)$ et $u_\nu^{(2)}(z)$ seront conjuguées complexes. Introduisons une fonction qui prenne des valeurs réelles pour des $z$ et des $\nu$ réels:

$$u_\nu(z) = \frac{1}{2}[u_\nu^{(1)}(z) + u_\nu^{(2)}(z)]. \qquad (12)$$

Montrons que cette fonction se confondra avec $u_\nu^{(0)}(z)$ si l'on pose

$$a_\nu^{(2)} = -a_\nu^{(1)} = 2a_\nu. \qquad (13)$$

Pour la démonstration, il suffit d'appliquer le théorème de Cauchy à un contour $C$ qui réunit $C_0$, $C_1$ et $C_2$ de la figure 7. Supposons que ce contour se ferme à l'infini. On a alors en vertu du théorème de Cauchy

$$\int_C [s(z-s)]^{\nu-1/2} e^{2is}\, ds =$$

$$= -\int_{C_2} [s(z-s)]^{\nu-1/2} e^{2is}\, ds + \int_{C_0} [s(z-s)]^{\nu-1/2} e^{2is}\, ds +$$

$$+ \int_{C_1} [s(z-s)]^{\nu-1/2} e^{2is}\, ds = 0$$

(l'intégrale prise suivant la partie à l'infini du contour s'annule). Cette relation nous conduit, compte tenu de l'égalité (13) et des

formules (6) à (8), à l'égalité

$$u_\nu^{(0)}(z) = \frac{1}{2}[u_\nu^{(1)}(z) + u_\nu^{(2)}(z)], \tag{14}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Avec un choix approprié de la constante de normalisation $a_\nu$, la fonction $u_\nu^{(0)}(z)$ est une *fonction de Bessel de première espèce* et se note $J_\nu(z)$. Les fonctions $u_\nu^{(1)}(z)$ et $u_\nu^{(2)}(z)$ sont appelées, avec la normalisation (13), *fonctions de Hankel de première et de deuxième espèce* et se notent $H_\nu^{(1)}(z)$ et $H_\nu^{(2)}(z)$. On a d'après (14):

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2}[H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)]. \tag{15}$$

Les représentations intégrales (9) à (11) facilitent grandement l'étude des différentes propriétés des fonctions cylindriques. Par exemple, la représentation intégrale de $J_\nu(z)$ permet de développer très facilement cette fonction en série suivant les puissances de $z$; de même, les représentations intégrales des fonctions de Hankel permettent de cerner le comportement asymptotique de ces fonctions pour $z \to \infty$.

Pour développer $J_\nu(z)$ en série de puissances, portons dans (9) le développement de cos $zt$ en série suivant les puissances de $zt$ et permutons la sommation et l'intégration. Il vient alors

$$J_\nu(z) = \frac{a_\nu}{2^{2\nu}} z^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\nu-1/2} t^{2k}\, dt.$$

Simplifions l'expression des coefficients de la série en mettant en service la parité de l'intégrande, la liaison des fonctions bêta et gamma et la formule de duplication de la fonction gamma (voir Appendice A):

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\nu-1/2} t^{2k}\, dt = 2\int_{0}^{1} (1-t^2)^{\nu-1/2} t^{2k}\, dt =$$

$$= \int_0^1 (1-t)^{\nu-1/2} t^{k-1/2}\, dt = \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+k+1)} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}\,(2k)!}{2^{2k}k!\,\Gamma(\nu+k+1)}.$$

On a donc

$$J_\nu(z) = \frac{a_\nu}{2^\nu}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (z/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}.$$

Pour donner une forme plus simple au développement de $J_\nu(z)$, choisissons la constante de normalisation $a_\nu$ de telle sorte que

$$\frac{a_\nu}{2^\nu}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)=1. \tag{16}$$

On obtient alors

$$J_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}. \tag{17}$$

En tirant l'expression de $a_\nu$ de la formule (16), récrivons les relations (9) à (11) sous la forme

$$J_\nu(z)=\frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\nu-1/2}\cos zt\,dt, \tag{18}$$

$$H_\nu^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{z^\nu\exp\left\{i\left(z-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}}{\Gamma(\nu+1/2)}\times$$
$$\times\int_0^\infty e^{-zt}t^{\nu-1/2}\left(1+\frac{it}{2}\right)^{\nu-1/2}dt, \tag{19}$$

$$H_\nu^{(2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{z^\nu\exp\left\{-i\left(z-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}}{\Gamma(\nu+1/2)}\times$$
$$\times\int_0^\infty e^{-zt}t^{\nu-1/2}\left(1-\frac{it}{2}\right)^{\nu-1/2}dt. \tag{20}$$

Les représentations intégrales obtenues pour les fonctions cylindriques sont appelées *représentations de Poisson.*

A côté des représentations intégrales (19) et (20), on donne quelquefois aussi aux fonctions de Hankel des représentations intégrales déduites de (19) et de (20) en changeant $t$ en $t/z$:

$$H_\nu^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\frac{\exp\left\{i\left(z-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}}{\Gamma(\nu+1/2)}\times$$
$$\times\int_0^\infty e^{-t}t^{\nu-1/2}\left(1+\frac{it}{2z}\right)^{\nu-1/2}dt, \tag{19a}$$

$$H_\nu^{(2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\frac{\exp\left\{-i\left(z-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}}{\Gamma(\nu+1/2)}\times$$
$$\times\int_0^\infty e^{-t}t^{\nu-1/2}\left(1-\frac{it}{2z}\right)^{\nu-1/2}dt. \tag{20a}$$

## § 14. Propriétés principales des fonctions cylindriques

**1. Relations de récurrence et formules de dérivation.** Pour les fonctions cylindriques, les relations de récurrence et les formules de dérivation se déduisent par la méthode exposée dans le § 4, en utilisant la représentation intégrale initiale de ces fonctions:

$$u_\nu(z) = a_\nu z^{-\nu} e^{-iz} \int_C [s(z-s)]^{\nu-1/2} e^{2is}\, ds.$$

A titre d'exemple, nous déduirons une relation de la forme

$$A_1(z)\, u'_\nu(z) + A_2(z)\, u_\nu(z) + A_3(z)\, u_{\nu-1}(z) = 0 \quad (1)$$

dans laquelle les coefficients $A_i(z)$ sont des fonctions rationnelles de $z$. On a

$$A_1(z)\, u'_\nu(z) + A_2(z)\, u_\nu(z) + A_3(z)\, u_{\nu-1}(z) = \\ = e^{-iz} z^{-\nu-1} \int_C P(s)\, [s(z-s)]^{\nu-3/2} e^{2is}\, ds,$$

où

$$P(s) = A_1 a_\nu \left[(-\nu - iz)\, s(z-s) + \left(\nu - \frac{1}{2}\right) zs\right] + \\ + A_2 a_\nu zs(z-s) + A_3 z^2 a_{\nu-1}.$$

Pour que l'égalité (1) soit satisfaite, on doit choisir les coefficients $A_1(z)$, $A_2(z)$ et $A_3(z)$ de telle sorte qu'il y ait

$$P(s)\, [s(z-s)]^{\nu-3/2} e^{2is} = \frac{d}{ds} \{Q(s)\, [s(z-s)]^{\nu-1/2} e^{2is}\},$$

où $Q(s)$ est un polynôme. On a vu au § 4 que l'un des coefficients du polynôme $Q(s)$ peut être choisi arbitrairement. Dans notre cas le polynôme $Q(s)$ est de degré 0, si bien qu'on peut poser $Q(s) = a_\nu$. Substituant dans la dernière égalité les expressions de $P(s)$ et de $Q(s)$, nous aboutissons à l'égalité suivante:

$$A_1 [(-\nu - iz)\, s(z-s) + (\nu - 1/2)\, zs] + A_2 zs(z-s) + \\ + A_3 z^2 a_{\nu-1}/a_\nu = 2is(z-s) + (\nu - 1/2)(z-2s).$$

En faisant intervenir les expressions des constantes de normalisation $a_\nu$ correspondant aux fonctions $J_\nu(z)$ et $H_\nu^{(1,2)}(z)$, on obtient $a_{\nu-1}/a_\nu = (\nu - 1/2)/2$. L'égalité définissant les coefficients $A_i$ reste vraie pour $s$ quelconque. Il est donc légitime de chercher $A_i$ en posant $s$ égal à certaines valeurs particulières. Posons par exemple $s = 0$: il vient $A_3 = 2/z$. Pour $s = z$, on a $A_1 = -2/z$. Pour obtenir le coefficient $A_2$, il suffit d'identifier les coefficients affectant le terme de plus haut degré de $s$, ce qui donne $A_2 = -2\nu/z^2$. En dési-

gnant par $u_\nu(z)$ l'une des fonctions $J_\nu(z)$ ou $H_\nu^{(1,2)}(z)$, on obtient définitivement

$$\frac{\nu}{z}u_\nu(z)+u'_\nu(z)=u_{\nu-1}(z). \tag{2}$$

La relation de récurrence liant les fonctions $u_\nu(z)$, $u_{\nu-1}(z)$ et $u_{\nu-2}(z)$ pourrait être déduite par la même méthode. Or, il est plus facile de le faire en dérivant (2) et en éliminant de l'égalité obtenue les fonctions $u''_\nu(z)$, $u'_\nu(z)$, $u'_{\nu-1}(z)$ à l'aide de l'équation de Bessel et de la relation (2). On obtient ainsi

$$u_\nu(z)-\frac{2(\nu-1)}{z}u_{\nu-1}(z)+u_{\nu-2}(z)=0. \tag{3}$$

Aux relations (2), (3) on peut substituer des relations équivalentes

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}[z^\nu u_\nu(z)]=z^{\nu-1}u_{\nu-1}(z),$$

$$-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}[z^{-\nu}u_\nu(z)]=z^{-(\nu+1)}u_{\nu+1}(z).$$

D'où

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n[z^\nu u_\nu(z)]&=z^{\nu-n}u_{\nu-n}(z),\\ \left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n[z^{-\nu}u_\nu(z)]&=z^{-(\nu+n)}u_{\nu+n}(z).\end{aligned} \tag{4}$$

**2. Prolongement analytique et représentations asymptotiques.** Nous avons introduit les fonctions $J_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$ et $H_\nu^{(2)}(z)$ pour des $z$ réels, $z>0$, et $\operatorname{Re}\nu>3/2$.

Supposons maintenant que la variable complexe $z$ appartienne à un plan muni d'une coupure $(-\infty, 0)$, i.e. que $|\arg z|<\pi$. Cette restriction est nécessaire pour que la fonction $z^\nu$ reste univoque dans les cas où $\nu$ est non entier. En faisant intervenir les représentations intégrales (18) à (20) du § 13, on peut effectuer le prolongement analytique des fonctions $J_\nu(z)$ et $H_\nu^{(1,2)}(z)$ sur un domaine de variation de $z$ et de $\nu$ plus étendu.

L'intégrale de $J_\nu(z)$ converge uniformément en $z$ et en $\nu$ quand $\operatorname{Re}\nu\geqslant -1/2+\delta$, $|z|\leqslant R$ (où $\delta$, $R$ sont des entiers quelconques) en vertu de l'évaluation

$$|(1-t^2)^{\nu-1/2}\cos zt|\leqslant e^R(1-t^2)^{\delta-1}$$

et de la convergence de l'intégrale $\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^{\delta-1}\,dt$. Aussi, en vertu du théorème 2 du § 3, $J_\nu(z)$ sera-t-elle une fonction analytique de chacune des variables $z$, $\nu$ pour $|\arg z|<\pi$, $\operatorname{Re}\nu>-1/2$.

Les intégrales pour $H_\nu^{(1,2)}(z)$,

$$\int_0^\infty e^{-zt} t^{\nu-1/2}\left(1 \pm \frac{it}{2}\right)^{\nu-1/2} dt,$$

sont des intégrales de Laplace

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt$$

pour lesquelles $f(t) = t^{\nu-1/2}(1 \pm it/2)^{\nu-1/2}$. Le prolongement analytique et la représentation asymptotique pour les intégrales de Laplace du type

$$F(z, p, q) = \int_0^\infty e^{-zt} t^p (1+at)^q\, dt$$

sont étudiés en détail dans l'exemple page 299. Puisqu'on a dans ce cas $p = q = \nu - 1/2$ et $a = \pm i/2$, les fonctions de Hankel $H_\nu^{(1,2)}(z)$ seront, d'après les résultats obtenus dans l'exemple indiqué, des fonctions analytiques de chacune des variables pour $|\arg z| < \pi$, $z \neq 0$, $\operatorname{Re} \nu > -1/2$. Pour $z \to \infty$, $\operatorname{Re} \nu > -1/2$ et $|\arg z| \leqslant \pi - \varepsilon$, ces fonctions admettent la représentation asymptotique suivante:

$$H_\nu^{(1,2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{\pm i\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}\left[\sum_{k=0}^{n-1} C_k \left(\pm \frac{i}{z}\right)^n + O\left(\frac{1}{z^n}\right)\right]. \qquad (5)$$

Ici

$$C_k = \frac{\Gamma(\nu + 1/2 + k)}{2^k k!\, \Gamma(\nu + 1/2 - k)},$$

le signe supérieur se rapporte à la fonction $H_\nu^{(1)}(z)$ et le signe inférieur à $H_\nu^{(2)}(z)$. A l'aide de la relation fonctionnelle $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, on arrive à simplifier l'expression de $C_k$. On a

$$\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2} + k\right) = \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\left(\nu + \frac{3}{2}\right) \ldots \left(\nu + k - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right),$$

$$\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2} - k\right) = \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\left(\nu - \frac{1}{2}\right)\left(\nu - \frac{3}{2}\right) \ldots \left(\nu - k + \frac{1}{2}\right)}.$$

Donc

$$C_k = \prod_{l=1}^{k} \left[\frac{4\nu^2 - (2l-1)^2}{8l}\right], \qquad C_0 = 1.$$

A l'aide de la relation

$$J_\nu(z)=\frac{1}{2}[H_\nu^{(1)}(z)+H_\nu^{(2)}(z)]$$

on déduit la représentation asymptotique de la fonction $J_\nu(z)$:

$$J_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{C_k}{z^k}\cos\left[z-\frac{\pi}{2}\left(\nu-k+\frac{1}{2}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{z^n}\right)\right\}. \qquad (6)$$

Nous venons de considérer le prolongement analytique des fonctions cylindriques sur le domaine de $z\neq 0$, $|\arg z|<\pi$ et $\operatorname{Re}\nu>-1/2$. La restriction $\operatorname{Re}\nu>-1/2$ n'est pas essentielle, car pour $\operatorname{Re}\nu\leqslant-1/2$ on peut obtenir le prolongement analytique des fonctions cylindriques à l'aide de la relation de récurrence (3) en diminuant successivement d'une unité la valeur de $\nu$. En vertu de la formule de dérivation (2), les dérivées des fonctions cylindriques $J_\nu(z)$ et $H_\nu^{(1,2)}(z)$ seront analytiques par rapport à la variable $z$ et au paramètre $\nu$ dans le même domaine que les fonctions cylindriques elles-mêmes. En vertu du principe du prolongement analytique, les fonctions cylindriques considérées devront vérifier l'équation de Bessel dans le même domaine.

**3. Relations fonctionnelles.** L'équation de Bessel ne change pas lorsqu'on change $\nu$ en $-\nu$. Elle admet donc comme solutions non seulement $H_\nu^{(1)}(z)$ et $H_\nu^{(2)}(z)$ mais aussi $H_{-\nu}^{(1)}(z)$ et $H_{-\nu}^{(2)}(z)$. Pour établir la relation entre les fonctions $H_\nu^{(1,2)}(z)$ et $H_{-\nu}^{(1,2)}(z)$, supposons provisoirement que $|\operatorname{Re}\nu|<1/2$. Alors les fonctions de Hankel $H_{\pm\nu}^{(1,2)}(z)$ admettront les représentations asymptotiques (5). Ces dernières montrent que les fonctions $H_\nu^{(1,2)}(z)$ présentent un comportement asymptotique différent pour $z\to\infty$ et sont à ce titre des solutions linéairement indépendantes de l'équation de Bessel. On a donc

$$H_{-\nu}^{(1)}(z)=A_\nu H_\nu^{(1)}(z)+B_\nu H_\nu^{(2)}(z), \qquad (7)$$

où $A_\nu$ et $B_\nu$ sont des constantes. En confrontant le comportement asymptotique du premier et du second membre de (7) pour $z\to\infty$, on obtient $A_\nu=e^{i\pi\nu}$, $B_\nu=0$, i.e.

$$H_{-\nu}^{(1)}(z)=e^{i\pi\nu}H_\nu^{(1)}(z). \qquad (8)$$

On déduit par un procédé analogue la relation

$$H_{-\nu}^{(2)}(z)=e^{-i\pi\nu}H_\nu^{(2)}(z). \qquad (9)$$

A l'aide des formules (8) et (9), on s'assure aisément que les représentations asymptotiques (5) et, partant, (6) restent valables pour $\nu$ quelconque.

Cherchons la relation entre les fonctions $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ et les fonctions $J_\nu(z)$, $J_{-\nu}(z)$. Puisque

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &= \frac{1}{2}[H_\nu^{(1)}(z)+H_\nu^{(2)}(z)], \\ J_{-\nu}(z) &= \frac{1}{2}[H_{-\nu}^{(1)}(z)+H_{-\nu}^{(2)}(z)], \end{aligned} \tag{10}$$

on a en vertu de (8) et de (9)

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(z) &= \frac{J_{-\nu}(z)-e^{-i\pi\nu}J_\nu(z)}{i\sin\pi\nu}, \\ H_\nu^{(2)}(z) &= \frac{e^{i\pi\nu}J_\nu(z)-J_{-\nu}(z)}{i\sin\pi\nu}. \end{aligned} \tag{11}$$

4. **Développements en séries de puissances.** Nous avons obtenu plus haut un développement en série de la fonction $J_\nu(z)$ suivant les puissances de $z$ pour des $z$ réels, $z > 0$, et $\mathrm{Re}\,\nu > 3/2$:

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}. \tag{12}$$

Pour montrer que ce développement reste valable pour toutes les valeurs de $\nu$ et de $z$, nous allons étudier le domaine d'analyticité de la série (12) à l'aide du théorème de Weierstrass *).

THÉORÈME 1. *Supposons que les fonctions $f_k(z)$ soient analytiques dans un domaine $D$ et que la série $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ soit uniformément convergente, dans toute partie fermée $\overline{D}_1 \subset D$, vers une fonction $f(z)$. On a alors dans $D$:*

1° *la fonction $f(z)$ est analytique;*

2° $f^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(n)}(z)$;

3° *la série $\sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(n)}(z)$ converge uniformément dans toute partie fermée $\overline{D}_1 \subset D$.*

*Remarque.* La série fonctionnelle $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ est uniformément convergente dans $D$ s'il existe un $m$ tel que pour tout $z \in D$ et pour

*) Le lecteur trouvera la démonstration de ce théorème dans [13] et [9].

$k > m$ on a:

$$\left| \frac{f_k(z)}{f_{k-1}(z)} \right| \leqslant q < 1;$$

dans cette inégalité $q$ est indépendant de $z$ et on a $|f_m(z)| \leqslant C$ pour $z \in D$ ($C$ = const). Ce critère de convergence uniforme d'une série est appelé *critère de d'Alembert.*

Montrons que la série (12) converge uniformément en $z$ et en $\nu$ dans le domaine $0 < \delta \leqslant |z| \leqslant R$, $|\nu| \leqslant N$, où $R$ et $N$ sont des nombres arbitraires fixes suffisamment élevés. Pour la démonstration, il suffit d'appliquer l'évaluation suivante du rapport de deux termes voisins de la série:

$$\left| \frac{u_k(z)}{u_{k-1}(z)} \right| = \frac{|z|^2}{4k|k+\nu|} \leqslant \frac{R^2}{4k(k-N)} \leqslant \frac{1}{4}$$

pour $k \geqslant \max(R^2, N+1)$. Puisque les termes de la série sont des fonctions analytiques des variables $z$ et $\nu$ dans le domaine $\delta \leqslant \leqslant |z| \leqslant R$, $|\arg z| < \pi$, $|\nu| \leqslant N$, la série (12) sera une fonction analytique des variables $z$ et $\nu$ pour des valeurs quelconques de $\nu$ et $|\arg z| < \pi$.

Ainsi donc, chacun des deux membres de l'égalité (12) est une fonction analytique de chacune des variables $z$ et $\nu$ pour des valeurs quelconques de $\nu$ et $|\arg z| < \pi$. En vertu du principe du prolongement analytique, la relation (12) reste valable dans tout le domaine indiqué de variation des variables $z$ et $\nu$.

Si $\nu \neq 0, 1, 2, \ldots$, les fonctions $J_\nu(z)$ et $J_{-\nu}(z)$ sont linéairement indépendantes, car elles présentent pour $z \to 0$ un comportement différent:

$$J_\nu(z) \approx \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}, \quad J_{-\nu}(z) \approx \frac{(z/2)^{-\nu}}{\Gamma(-\nu+1)}.$$

Il en découle que pour $\nu \neq n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) l'équation de Bessel admet une solution générale sous la forme

$$u(z) = C_1 J_\nu(z) + C_2 J_{-\nu}(z).$$

A l'aide de la série (12) et des formules (11), on obtient des développements en séries des fonctions $H_\nu^{(1,2)}(z)$ suivant les puissances de $z$. Aucune difficulté ne surgit pour $\nu \neq n$. Concentrons-nous donc sur le cas de $\nu = n$.

Les valeurs de $\nu = n$ dans les seconds membres des relations (11) sont des points singuliers inessentiels, car les premiers membres sont des fonctions analytiques du paramètre $\nu$ et admettent à ce titre une limite pour $\nu \to n$. Le dénominateur dans (11) s'annule pour $\nu = n$; pour que (11) admette une limite finie, il faut donc que le numérateur s'annule lui aussi pour $\nu = n$, i.e.

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z),$$

d'où il ressort que pour $\nu = n$ les solutions de l'équation de Bessel $J_n(z)$ et $J_{-n}(z)$ seront linéairement dépendantes. En passant à la limite pour $\nu \to n$ et en calculant les limites par la règle de L'Hospital, on obtient

$$H_n^{(1,2)}(z) = J_n(z) \pm \frac{i}{\pi}\left[a_n(z) + (-1)^n a_{-n}(z)\right], \tag{13}$$

où $a_\nu(z) = \partial J_\nu(z)/\partial\nu$ (le signe positif correspond à $H_n^{(1)}(z)$).

Puisque, dans le domaine considéré plus haut, la fonction $J_\nu(z)$ se développe en une série uniformément convergente composée de fonctions analytiques de la variable $\nu$, on peut calculer $a_\nu(z)$ d'après le théorème de Weierstrass en dérivant terme à terme le développement de $J_\nu(z)$. Il vient

$$a_\nu(z) = J_\nu(z)\ln\frac{z}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (z/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\,\psi(k+\nu+1),$$

où $\psi(z)$ est la dérivée logarithmique de la fonction gamma (voir Appendice A). Puisque

$$\frac{\psi(z)}{\Gamma(z)} \xrightarrow[z\to -n]{} (-1)^{n+1} n!$$

(voir formule (27) de l'Appendice A), on a

$$(-1)^n a_{-n}(z) = (-1)^n J_{-n}(z)\ln\frac{z}{2} -$$

$$-(-1)^n\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k (z/2)^{-n+2k}}{k!}(-1)^{n-k}(n-k-1)! + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k (z/2)^{-n+2k}\,\psi(k-n+1)}{k!\,\Gamma(k-n+1)}\right\} =$$

$$= J_n(z)\ln\frac{z}{2} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} -$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}\,\psi(k+1).$$

Aussi

$$H_n^{(1,2)}(z) =$$

$$= J_n(z) \pm \frac{i}{\pi}\left\{2J_n(z)\ln\frac{z}{2} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}\left[\psi(n+k+1) + \psi(k+1)\right]\right\}. \tag{14}$$

Pour $n = 0$, on admet que la première somme s'annule. Les valeurs de $\psi(x)$ pour $x$ entier se calculent d'après la formule (16) de l'Appendice A.

Les formules (11) et (14) montrent que les fonctions $H_\nu^{(1,2)}(z)$ admettent pour $z = 0$ une singularité du type puissance $z^{\pm\nu}$ si $\operatorname{Re}\nu \neq 0$ et une singularité logarithmique si $\nu = 0$.

## § 15. Représentation intégrale de Sommerfeld

**1. Représentation intégrale de Sommerfeld des fonctions cylindriques.** En étudiant les propriétés des solutions de l'équation de Bessel pour les fonctions $J_\nu(z)$ et $H_\nu^{(1,2)}(z)$, on s'est servi utilement des représentations intégrales de Poisson.

Les fonctions cylindriques admettent également une autre représentation intégrale, qui s'avère fort utile dans les problèmes liés à la diffraction. Pour établir cette représentation, nous nous baserons sur les considérations suivantes. On a vu au § 11 que la fonction

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(r, \varphi)\, e^{-in\varphi}\, d\varphi$$

est pour $z = \sqrt{\lambda}\, r$ une fonction cylindrique d'ordre $n$ si la fonction $v$ vérifie l'équation $\Delta v + \lambda v = 0$. La solution élémentaire de l'équation $\Delta v + \lambda v = 0$ pour $\lambda = k^2 > 0$ est une onde plane $v = e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}$, où $\boldsymbol{k}$ est le vecteur onde. Si l'axe des $y$ est parallèle à $\boldsymbol{k}$, on a

$$v(r, \varphi) = e^{ikr\sin\varphi}.$$

On aboutit à la représentation intégrale suivante de la fonction cylindrique $u_n(z)$:

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\sin\varphi - in\varphi}\, d\varphi. \tag{1}$$

Des représentations intégrales analogues peuvent être déduites pour des fonctions cylindriques d'ordre $\nu$ arbitraire. A cet effet, il est naturel de chercher la solution de l'équation de Bessel pour $\nu$ quelconque sous forme d'une intégrale de contour:

$$u_\nu(z) = \int_C e^{iz\sin\varphi - i\nu\varphi}\, d\varphi.$$

Montrons que la fonction $u_\nu(z)$ vérifie toujours l'équation de Bessel, à condition de choisir convenablement le contour $C$. Pour cela, de même que pour la représentation (1), nous partirons du fait que la fonction $v(r, \varphi) = e^{ikr\sin\varphi}$ est solution de l'équation

d'Helmholtz

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+k^2v=0. \tag{2}$$

On s'assure sans peine que l'égalité (2) reste vraie pour toute valeur complexe donnée à $r$ et à $\varphi$.

Etablissons l'équation pour la fonction $v_\nu(r)=\int\limits_C v(r,\varphi)\,e^{-i\nu\varphi}d\varphi$ à l'aide de l'équation (2), en intégrant les deux membres de cette dernière le long du contour $C$ avec le poids $e^{-i\nu\varphi}$ et en simplifiant le terme en $\partial^2 v/\partial\varphi^2$ au moyen d'une double intégration par parties. En demandant que s'annule l'expression qui y apparaît

$$e^{-i\nu\varphi}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}+i\nu v\right)\Big|_{\varphi_2}^{\varphi_1}=ie^{ikr\sin\varphi-i\nu\varphi}(kr\cos\varphi+\nu)\Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2}$$

($\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont les extrémités du contour $C$), on aboutit à l'équation de Bessel pour $u_\nu(z)=v_\nu(r)$ avec $z=kr$.

Ainsi donc, on vient de montrer que la fonction

$$u_\nu(z)=\int\limits_C e^{iz\sin\varphi-i\nu\varphi}\,d\varphi \tag{3}$$

est bien solution de l'équation de Bessel, à condition qu'il y ait

$$e^{iz\sin\varphi-i\nu\varphi}(z\cos\varphi+\nu)\Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2}=0. \tag{4}$$

Puisque $\cos\varphi=\frac{1}{2}(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})$, la condition (4) sera évidemment remplie chaque fois que l'on aura pour $\nu$ quelconque

$$e^{iz\sin\varphi-i\nu\varphi}\,|_{\varphi=\varphi_1,\ \varphi_2}=0. \tag{5}$$

Les représentations du type (3) sont dites *représentations de Sommerfeld.*

**2. Représentations intégrales de Sommerfeld pour les fonctions de Hankel et les fonctions de Bessel de première espèce.** Dans la représentation intégrale de $u_\nu(z)$, on peut prendre comme $C$ par exemple un contour ayant ses extrémités à l'infini, tel que

$$\operatorname{Re}(iz\sin\varphi-i\nu\varphi)=$$
$$=\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2}\,|z|\,e^{i\theta}(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})-i\nu\varphi\right]\xrightarrow[\varphi\to\infty]{}-\infty. \tag{6}$$

Ici $\theta=\arg z$.

Considérons le contour $C$ représenté sur la figure 8 ($\varphi=\chi+i\psi$). Cherchons les restrictions qu'on doit imposer à $\alpha$ et $\beta$ pour que les conditions aux extrémités du contour soient remplies.

Soient $\chi = \alpha$, $\psi \to +\infty$. Dans ce cas $\varphi$ et $e^{i\varphi}$ dans (6) sont négligeables devant $e^{-i\varphi}$. La condition (6) s'écrit alors

$$\operatorname{Re} e^{i(\theta-\varphi)} \xrightarrow[\psi \to +\infty]{} +\infty.$$

Elle est remplie si $\cos(\theta - \alpha) > 0$. On peut admettre que

$$\theta - \pi/2 < \alpha < \theta + \pi/2. \tag{7}$$

Soient maintenant $\chi = \beta$, $\psi \to -\infty$. Dans ce cas tout se ramène à l'inégalité $(\theta + \beta) < 0$ qui sera satisfaite si l'on pose $\beta = -\alpha \pm \pi$. Les contours correspondants seront désignés par $C_+$ et $C_-$.

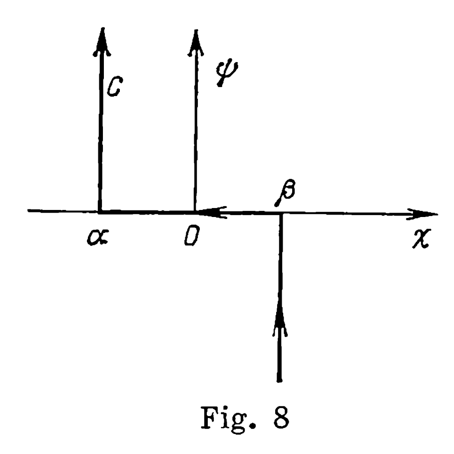



Fig. 8

Remarquons que le choix des contours comporte un certain degré d'arbitraire. Soit un contour $C'$ défini par la donnée de deux quantités $\alpha'$ et $\beta'$ telles que

$$\cos(\theta - \alpha') > 0, \qquad \cos(\theta + \beta') < 0.$$

A l'aide du théorème de Cauchy, on montre sans difficulté que le contour $C'$ peut être remplacé par tout autre contour, $C''$, défini par la donnée de deux nombres $\alpha''$, $\beta''$, à condition que pour tout $\alpha \in [\alpha', \alpha'']$ et tout $\beta \in [\beta', \beta'']$ il y ait $\cos(\theta - \alpha) > 0$ et $\cos(\theta + \beta) < 0$. On comprend alors que, dans la représentation de Sommerfeld, il est possible de prendre au lieu de $C$ un contour tel que son décalage d'une valeur inférieure à $\pi$ laisse inchangée la valeur de l'intégrale de Sommerfeld.

Puisque la fonction $u_\nu(z)$ vérifie l'équation de Bessel, elle peut s'écrire comme suit:

$$u_\nu(z) = C_\nu H_\nu^{(1)}(z) + D_\nu H_\nu^{(2)}(z). \tag{8}$$

Cherchons les coefficients $C_\nu$ et $D_\nu$ en utilisant le comportement asymptotique déjà connu des fonctions $H_\nu^{(1,2)}(z)$. Plaçons-nous d'abord dans le cas où l'on adopte comme $C$ le contour $C_+$. Soient $|z| \to \infty$ et $\arg z = \pi/2$. On peut alors choisir $\alpha = \beta = \pi/2$; autrement dit, on peut, dans l'expression de $u_\nu(z)$, poser $\varphi =$

$= \pi/2 + i\psi$, où $-\infty < \psi < \infty$. Cela nous donne

$$v_\nu(z) = ie^{-i\pi\nu/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|z|\operatorname{ch}\psi} e^{\nu\psi}\, d\psi = 2ie^{-i\pi\nu/2} \int_0^{\infty} e^{-|z|\operatorname{ch}\psi} \operatorname{ch} \nu\psi\, d\psi.$$

Afin de cerner le comportement asymptotique de la fonction $u_\nu(z)$ pour $z \to \infty$, on peut faire intervenir le lemme de Watson (voir Appendice B) après avoir fait le changement $\operatorname{ch}\psi = 1 + t$. On a, en effet:

$$u_\nu(z) = 2i \exp\left(-\frac{i\pi\nu}{2} - |z|\right) \int_0^{\infty} e^{-|z|t} f(t)\, dt,$$

où

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t(2+t)}} \operatorname{ch}\left[\nu \ln\left(1 + t + \sqrt{t(2+t)}\right)\right].$$

Puisque $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2t}}[1 + O(t)]$ pour $t \to 0$, il vient pour $z \to \infty$ en vertu du lemme de Watson

$$u_\nu(z) = 2i \exp\left(-i\frac{\pi\nu}{2} - |z|\right) \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{2|z|}}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right] =$$
$$= i\sqrt{\frac{2\pi}{|z|}} \exp\left(-i\frac{\pi\nu}{2} - |z|\right)\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right].$$

En identifiant les termes dominants de la représentation asymptotique du premier et du second membre de (8) (cf. (5), § 14), on obtient $D_\nu = 0$, $C_\nu = -\pi$. Ainsi donc,

$$H_\nu^{(1)}(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{C_+} e^{iz\sin\varphi - i\nu\varphi}\, d\varphi. \tag{9}$$

Par un procédé analogue, on obtient pour le contour $C_-$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{C_-} e^{iz\sin\varphi - i\nu\varphi}\, d\varphi. \tag{10}$$

D'où

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2}\left[H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{C_1} e^{iz\sin\varphi - i\nu\varphi}\, d\varphi, \tag{11}$$

où le contour $C_1$ est tel qu'on le voit sur la figure 9. Pour $\nu = n$, en vertu de la périodicité de la fonction à intégrer, l'intégration suivant le contour $C_1$ se réduit à l'intégration sur l'intervalle $]-\alpha - \pi, -\alpha + \pi[$. On sait que l'intégrale d'une fonction périodique prise suivant un segment de longueur égale à sa période est

indépendante de la position du segment. Pour cette raison

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \sin \varphi - in\varphi} \, d\varphi, \tag{11a}$$

i.e. la fonction $J_n(z)$ figure comme coefficient dans le développe-

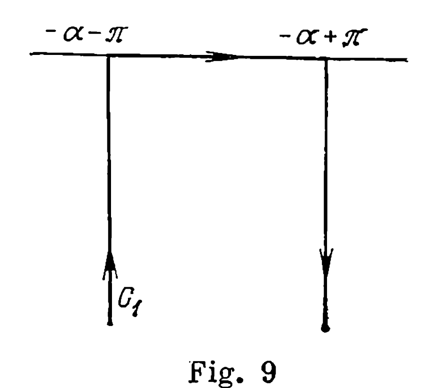



Fig. 9

ment de la fonction $e^{iz \sin \varphi}$ en série de Fourier suivant les fonctions $e^{in\varphi}$. Il vient donc

$$e^{iz \sin \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) \, e^{in\varphi}. \tag{12}$$

En vertu du principe du prolongement analytique, on montre que la relation (12) reste vraie pour toute valeur complexe de $\varphi$.

La représentation intégrale (11a) peut être simplifiée en utilisant la formule

$$e^{iz \sin \varphi - in\varphi} = \cos(z \sin \varphi - n\varphi) + i \sin(z \sin \varphi - n\varphi)$$

et la parité des fonctions $\cos(z \sin \varphi - n\varphi)$, $\sin(z \sin \varphi - n\varphi)$ par rapport à la variable $\varphi$. On obtient alors une représentation de la fonction $J_n(z)$ qui s'appelle *représentation intégrale de Sonine-Bessel*:

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \sin \varphi - n\varphi) \, d\varphi.$$

## § 16. Classes spéciales de fonctions cylindriques

**1. Fonctions de Bessel de deuxième espèce.** On rencontre souvent dans la pratique des solutions de l'équation de Bessel qui correspondent à des valeurs réelles de $\nu$ et à des valeurs positives de $z$. En pareils cas les fonctions de Hankel ne sont pas toujours faciles à manipuler, car elles prennent des valeurs complexes. Dans le cas considéré on a $H_\nu^{(2)}(z) = \overline{H_\nu^{(1)}(z)}$ (la barre indiquant la conjuguée

complexe) et

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2}[H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)] = \operatorname{Re} H_\nu^{(1)}(z).$$

Il est donc naturel d'adopter comme seconde solution réelle linéairement indépendante de l'équation de Bessel la fonction Im $H_\nu^{(1)}(z)$, i.e. la fonction

$$Y_\nu(z) = \frac{1}{2i}[H_\nu^{(1)}(z) - H_\nu^{(2)}(z)]. \qquad (1)$$

La fonction $Y_\nu(z)$ est appelée *fonction de Bessel de deuxième espèce* *).

La fonction $Y_\nu(z)$ définie par (1) a un sens pour toute valeur complexe de $\nu$ et de $z$. Elle reste fonction analytique de $\nu$ dans tout le plan complexe, y compris pour $\nu = n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), et fonction analytique de $z$ pour $z \neq 0$, $|\arg z| < \pi$.

Citons quelques propriétés principales de la fonction $Y_\nu(z)$ qui résultent des propriétés correspondantes des fonctions de Hankel.

a) *Expression de $Y_\nu(z)$ en fonction de $J_\nu(z)$ et de $J_{-\nu}(z)$*:

$$Y_\nu(z) = \frac{\cos \pi\nu J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin \pi\nu} \qquad (\nu \neq n).$$

b) *Développement en série de $Y_\nu(z)$* pour $\nu = n$:

$$Y_n(z) = \frac{1}{\pi}\left\{2J_n(z)\ln\frac{z}{2} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}[\psi(n+k+1) + \psi(k+1)]\right\}.$$

c) *Comportement asymptotique de $Y_\nu(z)$ pour $z \to \infty$*:

$$Y_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\sin\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{z}\right)\right].$$

d) *Relations de récurrence et formules de dérivation*:

$$Y_{\nu-1}(z) + Y_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} Y_\nu(z),$$

$$Y_{\nu-1}(z) - Y_{\nu+1}(z) = 2Y'_\nu(z).$$

On voit sur les figures 10 et 11 les courbes représentatives des fonctions de Bessel $J_\nu(x)$ et $Y_\nu(x)$ pour certaines valeurs entières de $\nu$ et pour $x > 0$.

**2. Fonctions de Bessel d'ordre demi-entier. Polynômes de Bessel.** Parmi les fonctions cylindriques, on distingue une classe spéciale

---

*) Elle est parfois appelée aussi *fonction de Weber* ou *fonction de Neumann* et notée $N_\nu(z)$. Remarquons que les fonctions de Hankel sont appelées aussi *fonctions de Bessel de troisième espèce*.

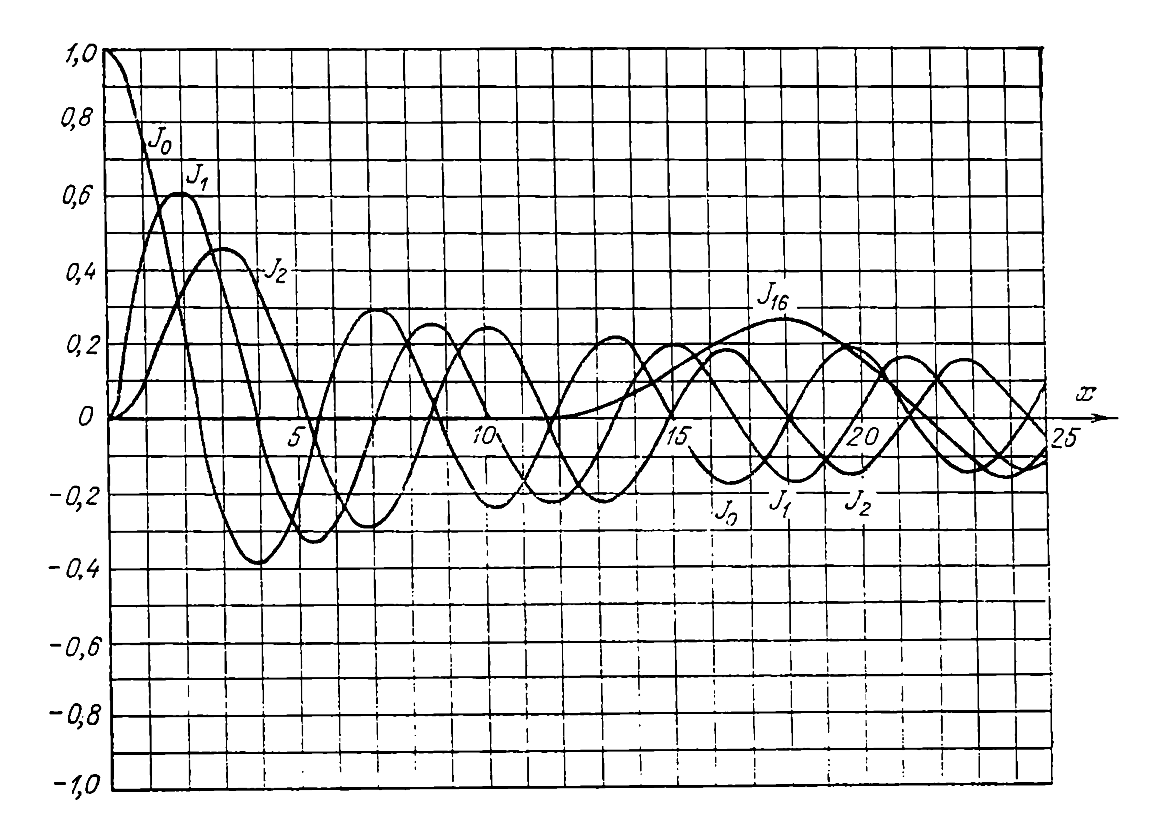

1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
-0,2
-0,4
-0,6
-0,8
-1,0
$J_0$
$J_1$
$J_2$
$J_{16}$
5
10
15
20
25
$x$
$J_0$
$J_1$
$J_2$

Fig. 10

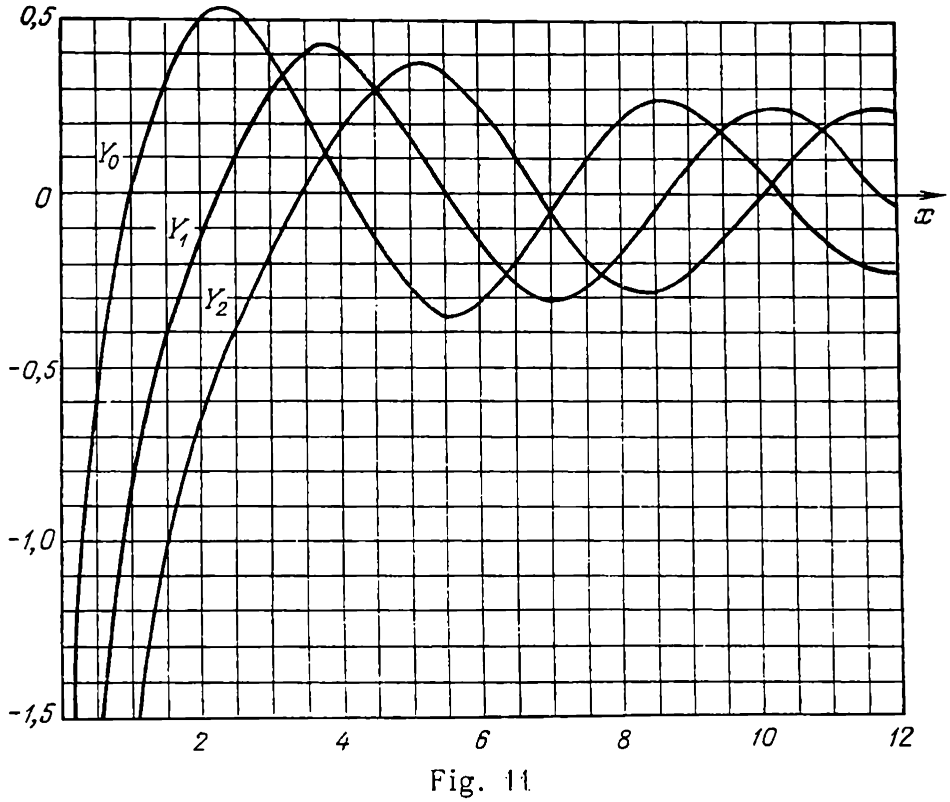

0,5
0
-0,5
-1,0
-1,5
$Y_0$
$Y_1$
$Y_2$
$x$
2
4
6
8
10
12

Fig. 11

de fonctions d'indice égal à la moitié d'un nombre impair *). L'intérêt de ces fonctions réside dans le fait qu'elles se laissent exprimer à l'aide de fonctions élémentaires. Pour le montrer, cherchons d'abord les expressions pour les fonctions $H_{1/2}^{(1,2)}(z)$; à cet effet, nous utiliserons les formules (19a) et (20a) du § 13:

$$H_{1/2}^{(1,2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{\pm i(z-\pi/2)},$$

d'où

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z, \quad Y_{1/2}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z.$$

On a ensuite, d'après les relations fonctionnelles (8) et (9) du § 14,

$$H_{-1/2}^{(1)}(z) = e^{i\pi/2} H_{1/2}^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{iz},$$

$$H_{-1/2}^{(2)}(z) = e^{-i\pi/2} H_{1/2}^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{-iz}.$$

D'où

$$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z, \quad Y_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z.$$

En posant dans les formules (4) du § 14 $\nu = -1/2$, on obtient

$$H_{n-1/2}^{(1,2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, z^n \left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n e^{\pm iz}, \tag{2}$$

$$J_{n-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, z^n \left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n \cos z, \tag{3}$$

$$Y_{n-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, z^n \left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n \sin z. \tag{4}$$

Liouville a montré que le cas d'indice demi-entier est bien le seul cas où les fonctions cylindriques se réduisent à des fonctions élémentaires.

Il ressort par récurrence de (2) que

$$H_{n+1/2}^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{iz} p_n\left(\frac{1}{iz}\right),$$

où $p_n(s)$ est un polynôme de degré $n$ par rapport à la variable $s$. Du comportement asymptotique de $H_{n+1/2}^{(1)}(z)$ pour $z \to \infty$ on déduit sans peine que $p_n(0) = (-i)^{n+1}$. Montrons que $p_n(s)$ est un polynôme du type hypergéométrique et qu'il se laisse exprimer à l'aide

*) On rencontre par exemple des fonctions de ce type en résolvant l'équation d'Helmholtz par séparation des variables en coordonnées sphériques.

des polynômes de Bessel (voir § 5, n° 1):

$$y_n(z) = 2^{-n} e^{2/z} \frac{d^n}{dz^n} (z^{2n} e^{-2/z}).$$

En effet, on peut déduire de l'équation différentielle pour la fonction de Hankel $H^{(1)}_{n+1/2}(z)$ une équation différentielle pour les polynômes $p_n(s)$:

$$s^2 p''_n(s) + 2(s+1) p'_n(s) - n(n+1) p_n(s) = 0.$$

Puisque c'est une équation du type hypergéométrique, le polynôme $p_n(s)$ est un polynôme du type hypergéométique. Ecrivons l'expression de $p_n(s)$ à l'aide de la formule de Rodrigues:

$$p_n(s) = B_n e^{2/s} \frac{d^n}{ds^n} (s^{2n} e^{-2/s}).$$

On voit que le polynôme $p_n(s)$ se confond à un facteur de normalisation près avec le polynôme de Bessel $y_n(s)$. Puisque $p_n(0) = i^{n+1}$, $y_n(0) = 1$, on obtient finalement la relation entre les fonctions de Hankel $H^{(1)}_{n+1/2}(z)$ et les polynômes de Bessel:

$$H^{(1)}_{n+1/2}(z) = (-i)^{n+1} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{iz} y_n\left(\frac{1}{iz}\right).$$

De même

$$H^{(2)}_{n+1/2}(z) = i^{n+1} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-iz} y_n\left(-\frac{1}{iz}\right).$$

**3. Fonctions de Bessel d'argument imaginaire.** Nous avons discuté l'équation de Bessel

$$z^2u'' + zu' + (z^2 - \nu^2) u = 0$$

pour des valeurs complexes de $z$. Le cas le plus important du point de vue des applications pratiques est celui où les $z$ sont positifs. Or, dans certains cas, on s'attache à étudier l'équation

$$z^2u'' + zu' - (z^2 + \nu^2) u = 0 \tag{5}$$

pour $z > 0$; elle se déduit de l'équation de Bessel en remplaçant $z$ par $iz$. Les classes spéciales des solutions de l'équation (5) s'appellent donc *fonctions de Bessel d'argument imaginaire* ou *fonctions de Bessel modifiées.*

Il est évident que l'équation (5) admet comme solutions linéairement indépendantes les fonctions $J_\nu(iz)$ et $H^{(1)}_\nu(iz)$. La première de ces solutions est bornée pour $z \to 0$ si $\nu > 0$, et la seconde, pour $z \to \infty$.

Au lieu de $J_\nu(iz)$ et de $H^{(1)}_\nu(iz)$, on utilise généralement les fonctions

$$I_\nu(z) = e^{-i\pi\nu/2} J_\nu(iz), \tag{6}$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} e^{i\pi(\nu+1)/2} H^{(1)}_\nu(iz). \tag{7}$$

Ces fonctions prennent des valeurs réelles pour $z > 0$ et des $\nu$

réels, ce qui découle des relations

$$I_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)},$$

$$K_\nu(z)=\frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-\nu}(z)-I_\nu(z)}{\sin\pi\nu}.$$

Ces relations se déduisent du développement en série de puissances de la fonction $J_\nu(z)$ et de la relation fonctionnelle qui lie la fonction $H_\nu^{(1)}(iz)$ aux fonctions $J_\nu(z)$ et $J_{-\nu}(z)$. La fonction $K_\nu(z)$ est appelée *fonction de Macdonald.*

Indiquons quelques principales propriétés des fonctions $I_\nu(z)$ et $K_\nu(z)$ qui découlent de leur lien avec les fonctions $J_\nu(iz)$ et $H_\nu^{(1)}(iz)$.

1) *Représentations intégrales de Poisson.* Des représentations intégrales (18) et (19) du § 13 il ressort que

$$I_\nu(z)=\frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\nu-1/2}\operatorname{ch} zt\,dt,$$

$$K_\nu(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}\,\frac{\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}t^{\nu-1/2}\left(1+\frac{t}{2z}\right)^{\nu-1/2}dt}{\Gamma(\nu+1/2)}.$$

2) *Développements en séries:*

$$\left.\begin{aligned}
I_\nu(z)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)},\\
K_\nu(z)&=\frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-\nu}(z)-I_\nu(z)}{\sin\pi\nu}\qquad(\nu\neq n),\\
K_n(z)&=(-1)^{n+1}I_n(z)\ln\frac{z}{2}+\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}+\\
&\quad+\frac{1}{2}(-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}}{k!\,(k+n)!}\,[\psi(n+k+1)+\psi(k+1)]
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

(pour $n=0$ on suppose que la première somme s'annule).

Le développement de $I_\nu(z)$ permet de voir que pour $z>0$ et

$\nu \geqslant 0$ la fonction $I_\nu(z)$ est positive et croît de façon monotone avec la croissance de $z$ (voir fig. 12).

3) *Lien entre* $K_\nu(z)$ et $K_{-\nu}(z)$, *entre* $I_n(z)$ et $I_{-n}(z)$:

$$\begin{aligned} I_{-n}(z) &= I_n(z), \\ K_{-\nu}(z) &= K_\nu(z). \end{aligned} \tag{9}$$

4) *Comportement asymptotique pour* $z \to +\infty$:

$$I_\nu(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right],$$

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right].$$

5) *Relations de récurrence et formules de dérivation*:

$$I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} I_\nu(z), \qquad I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z) = 2I'_\nu(z),$$

$$K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) = -\frac{2\nu}{z} K_\nu(z), \qquad K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) = -2K'_\nu(z),$$

en particulier

$$I'_0(z) = I_1(z), \qquad K'_0(z) = -K_1(z).$$

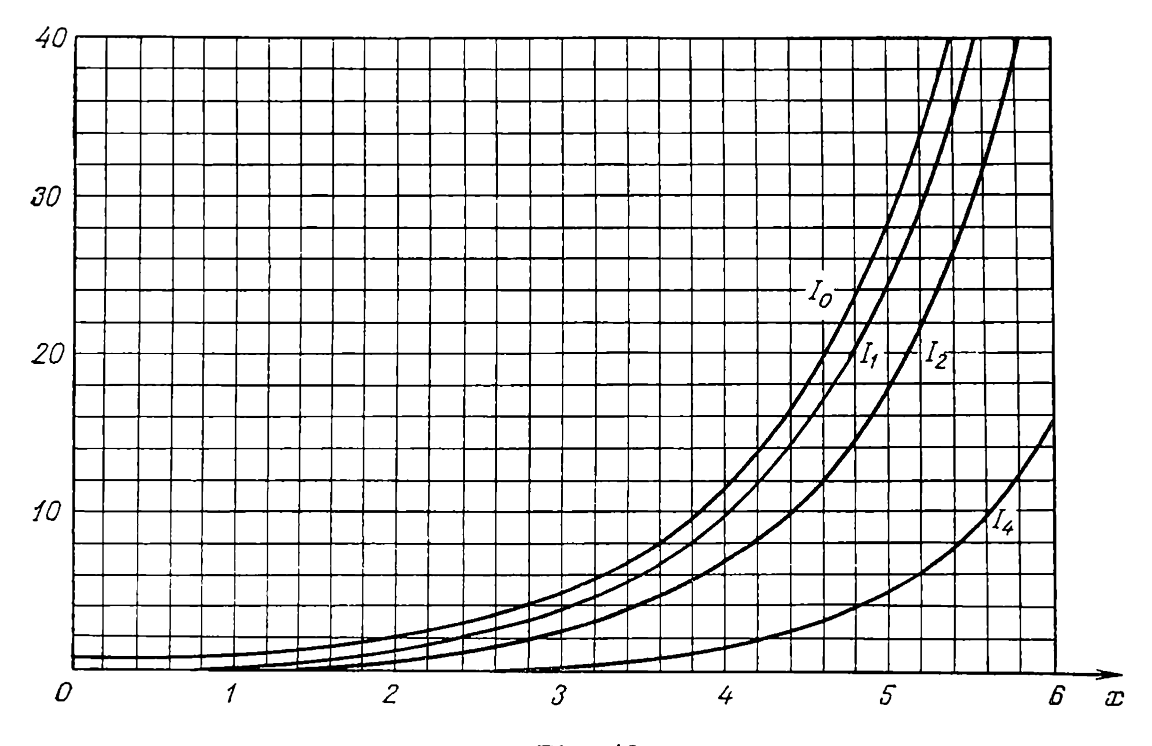



Fig. 12

6) *Expression des fonctions* $I_\nu(z)$ *et* $K_\nu(z)$ *d'ordre demi-entier à l'aide de fonctions élémentaires*:

$$I_{n-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, z^n \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n \operatorname{ch} z \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

$$K_{n-1/2}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,z^n\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n e^{-z}\qquad (n=0,\ 1,\ \ldots).$$

7) *Représentation intégrale de Sommerfeld de $K_\nu(z)$ pour $z>0$:*

$$K_\nu(z)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z\,\mathrm{ch}\,\psi+\nu\psi}\,d\psi=\int_0^{\infty} e^{-z\,\mathrm{ch}\,\psi}\,\mathrm{ch}\,\nu\psi\,d\psi. \tag{10}$$

Pour déduire (10), nous avons posé dans la formule (9) du § 15 $\alpha = \pi/2$, $\varphi = \pi/2 + i\psi$, où $-\infty < \psi < \infty$. De la représentation (10)

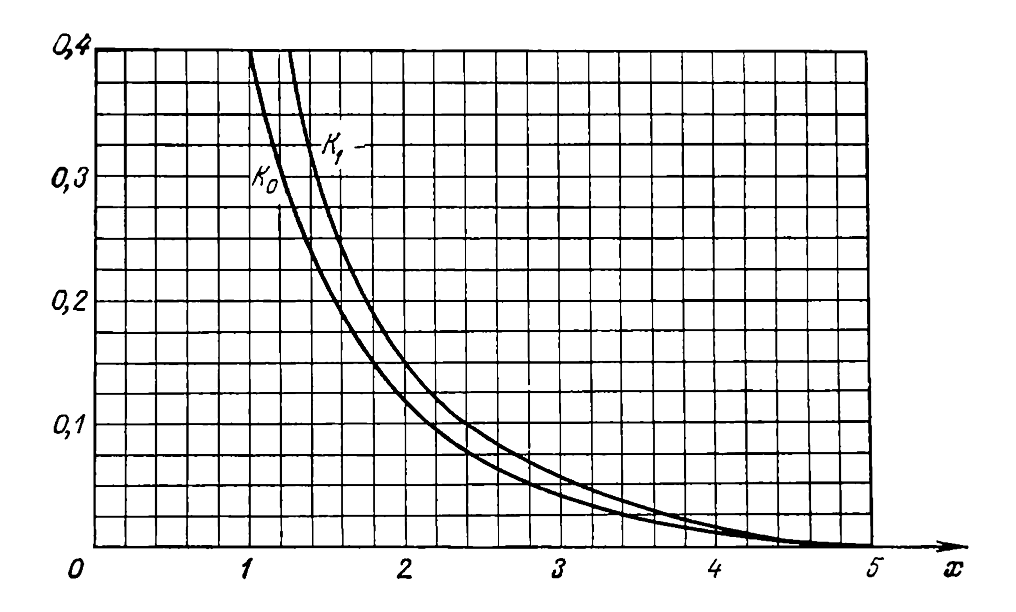



Fig. 13

on voit que pour $z > 0$ et des $\nu$ réels la fonction de Macdonald $K_\nu(z)$ est positive et décroît de façon monotone avec la croissance de $z$ (voir fig. 13).

En faisant dans (10) le changement $\frac{z}{2}e^{-\psi} = t$ pour $z > 0$, on obtient une variante de la représentation intégrale de Sommerfeld de $K_\nu(z)$ fort intéressante pour les applications:

$$K_\nu(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_0^{\infty} e^{-t-\frac{z^2}{4t}}\,t^{-\nu-1}\,dt. \tag{11}$$

*Remarque.* Il découle des propriétés des fonctions $I_\nu(z)$ et $K_\nu(z)$ que l'équation (5) admet comme intégrale générale, pour $\nu \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, la fonction

$$u(z) = AI_\nu(z) + BK_\nu(z);$$

on a par ailleurs $B = 0$ si la fonction $u(z)$ est bornée pour $z = 0$ et $A = 0$ si elle est bornée pour $z \to +\infty$.

Nous avons étudié les classes spéciales les plus usitées des fonctions cylindriques. Pour certains problèmes intéressants, il est bon d'introduire quelques autres classes spéciales de fonctions cylindriques, notamment les parties réelles et imaginaires des fonctions cylindriques $u_\nu(z)$ pour $\operatorname{Im}\nu = 0$, $\arg z = \pm\pi/4, \pm3\pi/4$, la fonction d'Airy

$$\operatorname{Ai}(z) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{|z|}{3\pi}}\, K_{1/3}\left(\dfrac{2}{3}|z|^{3/2}\right) & \text{pour } z<0, \\ \dfrac{1}{3}\sqrt{\pi z}\left[I_{-1/3}\left(\dfrac{2}{3}z^{3/2}\right) + I_{1/3}\left(\dfrac{2}{3}z^{3/2}\right)\right] & \text{pour } z>0. \end{cases}$$

La fonction Ai $(z)$ est solution de l'équation

$$u'' + zu = 0.$$

**4. Application des fonctions de Bessel modifiées aux problèmes de sondage laser.** Les fonctions de Bessel sont largement utilisées dans les problèmes les plus divers de la science et de la technique. A titre d'exemple, nous allons examiner l'utilisation des fonctions de Bessel modifiées $I_n(z)$ dans le problème de sondage laser de l'atmosphère; le principe du problème consiste à interpréter l'information sur l'absorption de l'impulsion laser dans une raie spectrale attribuée au corps chimique que l'on étudie.

L'absorption de la lumière dans les raies du spectre fournit souvent des renseignements précieux sur les propriétés physiques de la matière. C'est ainsi que les déplacements des raies (effet Doppler) renseignent sur la vitesse du mouvement dirigé de la matière, et la largeur des raies, sur la température et la densité de celle-ci.

A l'heure actuelle, on utilise largement le rayonnement laser pour déterminer la teneur de l'atmosphère en différents corps chimiques et aérosols, et plus particulièrement pour détecter des concentrations insignifiantes d'impuretés gazeuses distribuées dans l'atmosphère. La méthode la plus efficace est probablement celle de l'absorption comparée, qui implique l'utilisation de radars laser, dits lidars. Elle consiste à envoyer dans l'atmosphère des impulsions laser à deux fréquences voisines $\nu_1$ et $\nu_2$, dont l'une, $\nu_1$, se confond presque avec le centre de la raie d'absorption $\nu_a$ du corps étudié, et l'autre, $\nu_2$, se situe hors de cette raie. Le décalage de fréquences est choisi de la sorte qu'aucune raie d'absorption ne vienne se placer entre $\nu_1$ et $\nu_2$. Renvoyée par un réflecteur approprié, l'impulsion laser est captée par un récepteur.

On montre que le rapport des intensités des signaux captés par le récepteur aux fréquences $\nu_1$ et $\nu_2$ est défini par l'absorption du rayonnement laser dans le corps étudié à la fréquence $\nu_1$, car on peut admettre avec une bonne précision que les sections de tous les autres processus d'interaction du rayonnement avec la matière pour les fréquences voisines $\nu_1$ et $\nu_2$ sont sensiblement égales. Soient en effet

$k_l(\nu)$ le contour de la raie d'émission, i. e. l'intensité spectrale de l'impulsion laser;

$k_a(\nu)$ le contour de la raie d'absorption du corps étudié, i. e. le coefficient spectral d'absorption de la lumière dans la raie de fréquence $\nu = \nu_a$ rapporté à l'unité de masse;

$k(\nu)$ le coefficient spectral d'absorption pour les autres processus d'interaction du rayonnement avec la matière.

La puissance du rayonnement laser capté, dans l'hypothèse d'homogénéité de l'atmosphère, s'exprimera alors par

$$\int_0^\infty k_l(\nu) e^{-[\mu_a k_a(\nu)+k(\nu)]m} d\nu,$$

où $\mu_a$ est la concentration en % (de masse) de la composante considérée dans l'atmosphère; $m$, la masse de matière absorbante traversée par l'impulsion laser, $m = LS\rho_0$ ($L$ étant le chemin parcouru par l'impulsion entre l'émetteur et le récepteur, $S$, l'aire de surface de l'antenne réceptrice et $\rho_0$, la densité de l'atmosphère).

Pour le sondage de l'atmosphère par télédétection, on utilise des signaux à bande étroite, pour lesquels la fonction $k_l(\nu)$ ne cesse d'être pratiquement nulle que dans une plage de fréquences restreinte $\nu \approx \nu_l$. Lorsque $\nu_l = \nu_1$ et $\nu_l = \nu_2$, la variation de la fonction $k(\nu)$ peut être négligée dans les plages de fréquences correspondantes: on admet donc dans les deux cas que $k(\nu) = \text{const}$. En outre, quand $\nu_l = \nu_2$, on peut admettre que $k_a(\nu) = 0$ dans le domaine essentiel pour l'intégration, en vertu du choix de la fréquence $\nu_2$. Le rapport des intensités des signaux aux fréquences $\nu_1$ et $\nu_2$ se définira donc par l'expression suivante:

$$T = \frac{P_1}{P_2} \frac{\int_0^\infty k_l^{(1)}(\nu) e^{-\mu_a k_a(\nu) m} d\nu}{\int_0^\infty k_l^{(2)}(\nu)\, d\nu}. \tag{12}$$

Dans un grand nombre de cas pratiques importants, le contour réel de la raie d'absorption est proche de celui de l'absorption de Lorentz pour lequel on a

$$k_a(\nu) = \frac{J_0}{\pi} \frac{\gamma_a}{\gamma_a^2 + (\nu - \nu_a)^2}$$

($J_0$ est l'intensité de la raie et $\gamma_a$ la demi-largeur).

Une expression analogue définit généralement le contour de la raie d'émission $k_l(\nu)$, i. e.

$$k_l^{(i)}(\nu) = \frac{P_0}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\nu - \nu_i)^2}$$

($P_0$ est la puissance de l'impulsion émise; $i = 1, 2$).

On a dans ce cas

$$T = \frac{\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\nu - \nu_1)^2} \exp\left[-\frac{J_0 m \mu_a}{\pi} \frac{\gamma_a}{\gamma_a^2 + (\nu - \nu_a)^2}\right] d\nu}{\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\nu - \nu_2)^2} d\nu}.$$

Puisqu'on a généralement $\gamma \ll \nu_i$, il est possible de faire l'intégration sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ au lieu de $]0, \infty[$, sans que la valeur de $T$ s'en trouve

grandement changée. En posant

$$t=2 \operatorname{arc\,tg} \frac{\nu-\nu_a}{\gamma_a},$$

on obtient

$$T=T(z,\ a,\ \delta)=$$

$$=\frac{ae^{-z}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-z \cos t}\, dt}{1+a^2(1+\delta^2)+[1-a^2(1-\delta^2)] \cos t+2a^2\delta \sin t}, \tag{13}$$

où

$$z=\frac{J_0 m \mu_a}{2\pi\gamma_a}, \quad a=\frac{\gamma_a}{\gamma}, \quad \delta=\frac{\nu_a-\nu_1}{\gamma_a}.$$

Dans cette expression toutes les quantités définissant $T$ se prêtent aisément au calcul, à l'exception de $\mu_a$. Donc, si l'on dispose des valeurs expérimentales de $T$, la valeur de $\mu_a$ peut être obtenue par exemple à l'aide de la courbe de $T = T(\mu_a)$ construite à l'avance à l'aide de la formule (13).

Pour calculer l'intégrale (13), développons la fonction $e^{-z\cos t}$ en série de Fourier. Les coefficients du développement s'obtiennent en changeant dans la relation (12) du § 15 $z$ en $iz$ et $\varphi$ en $\pi/2-t$:

$$e^{-z \cos t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n I_n(z)\, e^{-int}.$$

Puisque $I_{-n}(z)=I_n(z)$, on a

$$e^{-z \cos t}=I_0(z)+2 \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n(z) \cos nt.$$

Il vient donc

$$T(z,\ a,\ \delta)=e^{-z}\left[I_0(z)\, S_0(a,\ \delta)+2 \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n(z)\, S_n(a,\ \delta)\right],$$

où

$$S_n(a,\ \delta)=\frac{a}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nt\, dt}{1+a^2(1+\delta^2)+[1-a^2(1-\delta^2)] \cos t+2a^2\delta \sin t}.$$

L'intégrale $S_n(a,\ \delta)$ se laisse réduire, moyennant le changement $\xi = e^{it}$, à une intégrale de contour prise suivant un cercle unité, que l'on calcule à l'aide de la théorie des résidus:

$$S_n(a,\ \delta)=(-1)^n \rho^n \cos n\alpha,$$

où

$$\rho=\sqrt{\frac{(a-1)^2+a^2\delta^2}{(a+1)^2+a^2\delta^2}} \quad (0 \leqslant \rho<1),$$

$$\cos \alpha=\frac{1-a^2(1-\delta^2)}{r}, \qquad \sin \alpha=\frac{2a^2\delta}{r},$$

$$r=\sqrt{[(a-1)^2+a^2\delta^2][(a+1)^2+a^2\delta^2]}.$$

On obtient ainsi

$$T(z,\ a,\delta)=e^{-z}\left[I_0(z)+2\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\cos n\alpha\, I_n(z)\right]. \tag{14}$$

Remarquant que $\rho<1$ et que pour une valeur fixée de $z$ et $n\to\infty$ on a

$$I_n(z)\approx\frac{1}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n,$$

la série (14) converge très rapidement et se prête donc aisément au calcul. Remarquons que les fonctions $I_n(z)$ font l'objet de tables très détaillées.

Les formules obtenues permettent de calculer la fonction de transmission $T$ pour des valeurs arbitraires de $\gamma_a$, $\gamma$, $\mu_a$, $\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_a$, ainsi que d'examiner des cas limites différents.

Supposons par exemple que $\nu_1=\nu_a$, i. e. que la fréquence du signal se confond avec le centre de la raie d'absorption. On a alors

$$\delta=0,\qquad \rho=\left|\frac{a-1}{a+1}\right|,$$

$$\alpha=\begin{cases}0 \text{ pour } \gamma_a<\gamma & (a<1),\\ \pi \text{ pour } \gamma_a>\gamma & (a>1).\end{cases}$$

On a alors d'après la formule (14)

$$T(z,\ a,\ 0)=e^{-z}\left[I_0(z)+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^n I_n(z)\right].$$

En particulier, si $\gamma_a=\gamma$ $(a=1)$, on a

$$T(z,\ 1,\ 0)=e^{-z}I_0(z).$$

## § 17. Théorèmes d'addition

On entend par théorèmes d'addition, en théorie des fonctions cylindriques, des formules du type

$$u_\nu(R)=F(r,\ \rho,\ \theta)\sum_{n=0}^{\infty}f_n(r)\,g_n(\rho)\,h_n(\theta), \tag{1}$$

où $r$, $\rho$, $R$ sont les longueurs des côtés d'un triangle arbitraire, $\theta$ l'angle formé par les côtés $r$ et $\rho$ (fig. 14), et $F(r,\ \rho,\ \theta)$ une fonction élémentaire de forme suffisamment simple. Ces formules donnent le développement de la fonction cylindrique $u_\nu(R)$ d'ordre $\nu$ en une série dont les termes représentent le produit d'une fonction de forme suffisamment simple $F(r,\ \rho,\ \theta)$, indépendante de l'indice de sommation, par des facteurs dont chacun ne dépend que de l'une des variables $r$, $\rho$, $\theta$. Les formules de ce type jouent un rôle important en physique mathématique, ainsi que dans les différentes applications des fonctions cylindriques *).

*) Voir, par exemple, А. Д. Галанин, *Теория ядерных реакторов на тепловых нейтронах*, М., Атомиздат, 1959, стр. 275-277 (A. Galanin, *Théorie des réacteurs atomiques à neutrons thermiques*).

**1. Théorème d'addition de Graf.** Désignons par $u_\nu(z)$ une des fonctions cylindriques $J_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$. Afin de déduire un théorème d'addition élémentaire, nous utiliserons la représentation intégrale de Sommerfeld de la fonction $u_\nu(R)$:

$$u_\nu(R) = A \int_C \exp\{iR\sin\varphi - i\nu\varphi\}\,d\varphi \tag{2}$$

($A$ est une constante de normalisation qui, dans le cas des fonctions considérées, est indépendante de $\nu$).

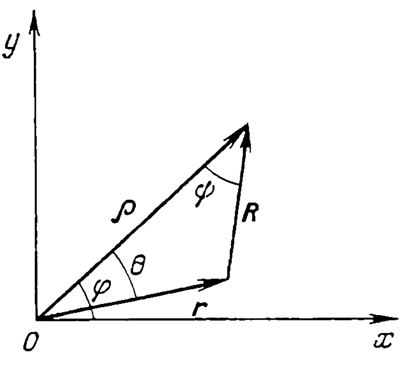



Fig. 14

Examinons le triangle montré sur la figure 14. Projetons l'égalité vectorielle $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{r}$ sur l'axe des $y$. Il vient

$$R\sin(\varphi + \psi) = \rho\sin\varphi - r\sin(\varphi - \theta).$$

Il est évident que cette relation reste vraie aussi pour des valeurs complexes de $\varphi$, en vertu du principe du prolongement analytique.

On a vu au § 15 qu'il est possible de choisir un contour $C$ tel que son déplacement d'une quantité $\psi$ inférieure à $\pi$ laisse inchangée la valeur de l'intégrale. Changeons dans (2) $\varphi$ en $\varphi + \psi$. On obtient

$$u_\nu(R)\,e^{i\nu\psi} = A \int_C \exp\{iR\sin(\varphi+\psi) - i\nu\varphi\}\,d\varphi =$$

$$= A \int_C \exp\{i\rho\sin\varphi + ir\sin(\theta - \varphi) - i\nu\varphi\}\,d\varphi.$$

Puisqu'on a d'après la formule (12) du § 15

$$e^{ir\sin(\theta-\varphi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r)\,e^{in(\theta-\varphi)},$$

il vient

$$u_\nu(R)\,e^{i\nu\psi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}J_n(r)\,A\int_C e^{i\rho\sin\varphi-i(\nu+n)\varphi}\,d\varphi=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r)\,u_{\nu+n}(\rho)\,e^{in\theta}.$$

La permutation de la sommation et de l'intégration est légitime dans le cas de $r<\rho$. On obtient donc en définitive la formule suivante:

$$u_\nu(R)\,e^{i\nu\psi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r)\,u_{\nu+n}(\rho)\,e^{in\theta}.$$

Comme les angles $\theta$ et $\psi$ sont invariants par le changement $R\to kR$, $r\to kr$, $\rho\to k\rho$, cette dernière formule peut s'écrire sous la forme

$$u_\nu(kR)\,e^{i\nu\psi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr)\,u_{\nu+n}(k\rho)\,e^{in\theta}. \tag{3}$$

La relation (3) s'appelle *théorème d'addition de Graf.*

**2. Théorème d'addition de Gegenbauer.** Un autre théorème d'addition correspond au cas où l'on a dans (1) $F(r, \rho, \theta)=R^\nu$. Pour le déduire, considérons la fonction

$$\frac{u_\nu(R)}{R^\nu}=v(R).$$

Pour fixer les idées, admettons que $r<\rho$: on a alors $R\neq 0$ et la fonction $v(R)$ reste bornée pour $r\to 0$.

La fonction $v(R)$ vérifie l'équation suivante (cf. l'équation de Lommel, § 13):

$$Rv''+(2\nu+1)\,v'+Rv=0. \tag{4}$$

On en déduit sans peine une équation aux dérivées partielles par rapport aux variables $r$ et $\mu=\cos\theta$ pour une valeur fixée de $\rho$. Comme $R=\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\mu}$, il vient

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{dv}{dR}\frac{r-\rho\mu}{R},\qquad \frac{\partial v}{\partial\mu}=-\frac{dv}{dR}\frac{r\rho}{R},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}=\frac{d^2v}{dR^2}\left(\frac{r-\rho\mu}{R}\right)^2+\frac{dv}{dR}\left[\frac{1}{R}-\frac{(r-\rho\mu)^2}{R^3}\right],$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\mu^2}=\frac{d^2v}{dR^2}\left(\frac{r\rho}{R}\right)^2-\frac{dv}{dR}\frac{(r\rho)^2}{R^3}.$$

Eliminant $\rho$, on en tire

$$\frac{1}{R}\frac{dv}{dR}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{\mu}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \mu}.$$

Puisque $R^2=(r-\rho\mu)^2+\rho^2(1-\mu^2)$, il vient

$$\frac{d^2v}{dR^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1-\mu^2}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \mu^2}.$$

Portant dans (4) les expressions obtenues de $\frac{dv}{dR}$ et de $\frac{d^2v}{dR^2}$, on aboutit à l'équation aux dérivées partielles

$$r^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+(2\nu+1)\,r\frac{\partial v}{\partial r}+r^2v+(1-\mu^2)\frac{\partial^2 v}{\partial \mu^2}-(2\nu+1)\,\mu\frac{\partial v}{\partial \mu}=0. \quad (5)$$

Conformément à la formule (1), le théorème d'addition doit s'écrire dans le cas considéré sous la forme

$$v(R)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(r)\,g_n(\rho)\,h_n(\mu) \quad (\mu=\cos\theta). \quad (6)$$

Essayons de définir la forme des fonctions $f_n(r)$, $g_n(\rho)$ et $h_n(\mu)$ de telle sorte que chaque terme de la série (6) satisfasse à l'équation (5). Nous chercherons donc des solutions bornées particulières de (5) par séparation des variables, en posant

$$v=f(r)\,g(\rho)\,h(\mu). \quad (7)$$

Portons (7) dans (5); il vient

$$\frac{r^2f''+(2\nu+1)\,rf'+r^2f}{f}=\frac{-(1-\mu^2)\,h''+(2\nu+1)\,\mu h'}{h}=\lambda, \quad (5a)$$

où $\lambda$ est une constante. On en déduit une équation du type hypergéométrique pour la fonction $h(\mu)$

$$(1-\mu^2)\,h''-(2\nu+1)\,\mu h'+\lambda h=0$$

qui admet comme solutions pour $\lambda=n\,(n+2\nu)$ des polynômes de Jacobi $P_n^{(\nu-1/2,\ \nu-1/2)}(\mu)$. Il est donc naturel de poser dans (6)

$$h_n(\mu)=P_n^{(\nu-1/2,\ \nu-1/2)}(\mu).$$

La formule (6) fournira alors le développement en série de la fonction $v(R)$ suivant les polynômes de Jacobi:

$$v(R)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r,\ \rho)\,P_n^{(\nu-1/2,\ \nu-1/2)}(\mu). \quad (8)$$

La fonction $v(R)$ satisfait aux conditions du théorème de développement en série suivant les polynômes de Jacobi $P_n^{(\nu-1/2,\ \nu-1/2)}(\mu)$

pour $\nu > -1/2$ (voir § 8), et ceci en sorte que

$$a_n(r, \rho) = \frac{1}{d_n^2} \int_{-1}^{1} v(R)(1-\mu^2)^{\nu-1/2} P_n^{(\nu-1/2,\, \nu-1/2)}(\mu)\, d\mu =$$

$$= \frac{1}{d_n^2} \int_{-1}^{1} \frac{u_\nu(R)}{R^\nu} (1-\mu^2)^{\nu-1/2} P_n^{(\nu-1/2,\, \nu-1/2)}(\mu)\, d\mu,$$

où $d_n^2$ est le carré de la norme du polynôme de Jacobi.

Il reste à montrer que le coefficient du développement $a_n(r, \rho)$ se laisse mettre sous la forme

$$a_n(r, \rho) = f_n(r)\, g_n(\rho).$$

A cet effet, intégrons l'équation (5) sur l'intervalle $]-1, 1[$ avec le poids $(1-\mu^2)^{\nu-1/2} P_n^{(\nu-1/2,\, \nu-1/2)}(\mu)$ et simplifions les termes en $\frac{\partial^2 v}{\partial \mu^2}$ et $\frac{\partial v}{\partial \mu}$ au moyen de l'intégration par parties. Puisque

$$\left[(1-\mu^2)\frac{\partial^2 v}{\partial \mu^2} - (2\nu+1)\mu \frac{\partial v}{\partial \mu}\right](1-\mu^2)^{\nu-1/2} = \frac{\partial}{\partial \mu}\left[(1-\mu^2)^{\nu+1/2} \frac{\partial v}{\partial \mu}\right],$$

on a

$$\int_{-1}^{1} \left[(1-\mu^2)\frac{\partial^2 v}{\partial \mu^2} - (2\nu+1)\mu \frac{\partial v}{\partial \mu}\right](1-\mu^2)^{\nu-1/2} P_n^{(\nu-1/2,\, \nu-1/2)}(\mu)\, d\mu =$$

$$= (1-\mu^2)^{\nu+1/2} \frac{\partial v}{\partial \mu} P_n^{(\nu-1/2,\, \nu-1/2)} \mu \Big|_{-1}^{1} -$$

$$- \int_{-1}^{1} \frac{\partial v}{\partial \mu} (1-\mu^2)^{\nu+1/2} \frac{d}{d\mu} P_n^{(\nu-1/2,\, \nu-1/2)}(\mu)\, d\mu =$$

$$= (1-\mu^2)^{\nu+1/2}\left[\frac{\partial v}{\partial \mu} P_n^{(\nu-1/2,\, \nu-1/2)}(\mu) - v \frac{d}{d\mu} P_n^{(\nu-1/2,\, \nu-1/2)}(\mu)\right]\Big|_{-1}^{1} +$$

$$+ \int_{-1}^{1} v \frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)^{\nu+1/2} \frac{d}{d\mu} P_n^{(\nu-1/2,\, \nu-1/2)}(\mu)\right] d\mu.$$

Comme $\nu + 1/2 > 0$, les termes hors intégrale s'annulent. Il ressort en outre de l'équation pour les polynômes de Jacobi que

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)^{\nu+1/2} \frac{d}{d\mu} P_n^{(\nu-1/2,\, \nu-1/2)}(\mu)\right] =$$

$$= -n(n+2\nu)(1-\mu^2)^{\nu-1/2} P_n^{(\nu-1/2,\, \nu-1/2)}(\mu).$$

On aboutit finalement à l'équation différentielle pour la fonction $a_n(r, \rho)$

$$\frac{\partial^2 a_n}{\partial r^2}+\frac{2\nu+1}{r}\frac{\partial a_n}{\partial r}+\left[1-\frac{n(n+2\nu)}{r^2}\right]a_n=0$$

qui, comme il fallait s'y attendre, se confond avec (5a) pour $\lambda = n(n+2\nu)$.

L'équation obtenue est un cas particulier de l'équation de Lommel. La seule solution bornée pour $r \to 0$ de cette équation est, à un facteur indépendant de $r$ près, la fonction $\frac{1}{r^\nu} J_{\nu+n}(r)$, i.e.

$$a_n(r, \rho)=\frac{1}{r^\nu} J_{\nu+n}(r)\, g_n(\rho).$$

On a donc

$$a_n(r, \rho)=\frac{1}{r^\nu} J_{\nu+n}(r)\, g_n(\rho)=$$

$$=\frac{1}{d_n^2}\int_{-1}^{1}\frac{u_\nu(R)}{R^\nu}(1-\mu^2)^{\nu-1/2} P_n^{(\nu-1/2,\, \nu-1/2)}(\mu)\, d\mu, \qquad (9)$$

où $d_n^2$ est le carré de la norme du polynôme de Jacobi. Pour connaître la fonction $g_n(\rho)$, calculons l'intégrale du second membre de (9) à l'aide de la formule de Rodrigues appliquée aux polynômes de Jacobi

$$P_n^{(\nu-1/2,\, \nu-1/2)}(\mu)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{1}{(1-\mu^2)^{\nu-1/2}}\frac{d^n}{d\mu^n}\left[(1-\mu^2)^{n+\nu-1/2}\right]$$

et en intégrant par parties $n$ fois:

$$\int_{-1}^{1}\frac{u_\nu(R)}{R^\nu}(1-\mu^2)^{\nu-1/2} P_n^{(\nu-1/2,\, \nu-1/2)}(\mu)\, d\mu=$$

$$=\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1}(1-\mu^2)^{n+\nu-1/2}\frac{\partial^n}{\partial\mu^n}\left[\frac{u_\nu(R)}{R^\nu}\right] d\mu.$$

Nous avons profité du fait que tous les termes hors intégrale s'annulent pour $\mu = \pm 1$, car le facteur $1-\mu^2$ intervient à un degré positif.

D'autre part, on a pour une fonction $v(R)$ arbitraire

$$\frac{\partial}{\partial\mu} v(R)=-\frac{r\rho}{R}\frac{dv}{dR},$$

d'où

$$\frac{\partial^n}{\partial\mu^n}\left[\frac{u_\nu(R)}{R^\nu}\right]=(r\rho)^n\left(-\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\right)^n\left[\frac{u_\nu(R)}{R^\nu}\right].$$

La formule de dérivation (4) du § 14 nous donne

$$\left(-\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\right)^n\left[\frac{u_\nu(R)}{R^\nu}\right]=\frac{u_{\nu+n}(R)}{R^{\nu+n}}.$$

Il vient en définitive

$$\int_{-1}^{1}\frac{u_\nu(R)}{R^\nu}(1-\mu^2)^{\nu-1/2}P_n^{(\nu-1/2,\,\nu-1/2)}(\mu)\,d\mu=$$

$$=\frac{1}{2^n n!}(r\rho)^n\int_{-1}^{1}\frac{u_{\nu+n}(R)}{R^{\nu+n}}(1-\mu^2)^{n+\nu-1/2}\,d\mu.$$

D'où, conformément à (9),

$$g_n(\rho)\frac{J_{\nu+n}(r)}{r^{\nu+n}}=\frac{\rho^n}{2^n n!\,d_n^2}\int_{-1}^{1}\frac{u_{\nu+n}(R)}{R^{\nu+n}}(1-\mu^2)^{n+\nu-1/2}\,d\mu. \qquad (10)$$

Soit $r\to 0$. On a alors $R\to\rho$ et donc

$$\frac{g_n(\rho)}{2^{\nu+n}\Gamma(\nu+n+1)}=\frac{u_{\nu+n}(\rho)}{\rho^\nu}\frac{1}{2^n n!\,d_n^2}\int_{-1}^{1}(1-\mu^2)^{n+\nu-1/2}\,d\mu.$$

Puisque (voir § 7)

$$d_n^2=\frac{2^{2\nu-1}\Gamma^2(n+\nu+1/2)}{n!\,(n+\nu)\,\Gamma(n+2\nu)},$$

$$\int_{-1}^{1}(1-\mu^2)^{n+\nu-1/2}\,d\mu=2\int_{0}^{1}(1-\mu^2)^{n+\nu-1/2}\,d\mu=$$

$$=\int_{0}^{1}(1-t)^{n+\nu-1/2}\,t^{-1/2}\,dt=\frac{\Gamma(n+\nu+1/2)\,\Gamma(1/2)\ ^{*)}}{\Gamma(n+\nu+1)},$$

on obtient finalement

$$g_n(\rho)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu-1}}\frac{(n+\nu)\,\Gamma(n+2\nu)\,u_{\nu+n}(\rho)}{\Gamma(n+\nu+1/2)\,\rho^\nu}.$$

Le développement (8) devient donc

$$\frac{u_\nu(R)}{R^\nu}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu-1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+\nu)\,\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+\nu+1/2)}\frac{J_{\nu+n}(r)}{r^\nu}\frac{u_{\nu+n}(\rho)}{\rho^\nu}P_n^{(\nu-1/2,\,\nu-1/2)}(\mu). \qquad (11)$$

---

*) Nous avons utilisé la parité de l'intégrande, le changement $t=\mu^2$ et la relation entre les fonctions bêta et gamma (voir Appendice A).

Si, au lieu des polynômes de Jacobi, on prend ceux de Gegenbauer

$$C_n^\nu(\mu) = \frac{(2\nu)_n}{(\nu+1/2)_n} P_n^{(\nu-1/2,\,\nu-1/2)}(\mu),$$

le développement (11) devient plus simple:

$$\frac{u_\nu(R)}{R^\nu} = 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{n=0}^{\infty} (\nu+n) \frac{J_{\nu+n}(r)}{r^\nu} \frac{u_{\nu+n}(\rho)}{\rho^\nu} C_n^\nu(\mu). \tag{12}$$

Rappelons que nous avons déduit la formule (12) pour le cas de $\nu > -1/2$, $r < \rho$.

Elle reste évidemment valable si l'on y effectue les changements $R \to kR$, $r \to kr$, $\rho \to k\rho$, i.e.

$$\frac{u_\nu(kR)}{(kR)^\nu} = 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{n=0}^{\infty} (\nu+n) \frac{J_{\nu+n}(kr)}{(kr)^\nu} \frac{u_{\nu+n}(k\rho)}{(k\rho)^\nu} C_n^\nu(\mu). \tag{13}$$

La relation (13) s'appelle *théorème d'addition de Gegenbauer.*

En déduisant les théorèmes d'addition de Graf et de Gegenbauer, nous avons imposé certaines restrictions aux paramètres. Le principe du prolongement analytique nous permet de généraliser les formules (3) et (13) à un domaine plus vaste des valeurs des paramètres.

**3. Développement des ondes sphérique et plane suivant les polynômes de Legendre.** Considérons quelques corollaires du théorème d'addition de Gegenbauer qui s'avèrent fort utiles, en théorie quantique de la diffusion par exemple, ainsi que pour des problèmes de la diffraction.

1) Posons dans (13) $\nu = 1/2$, $u_\nu(z) = H_\nu^{(1)}(z)$. A l'aide de l'expression explicite de la fonction $H_{1/2}^{(1)}(z)$, nous obtenons

$$e^{ikR} = i\pi \sum_{n=0}^{\infty} (n+1/2) \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{H_{n+1/2}^{(1)}(k\rho)}{\sqrt{\rho}} P_n(\mu).$$

Nous avons profité du fait que $C_n^{1/2}(\mu) = P_n(\mu)$, où $P_n(\mu)$ est un polynôme de Legendre.

2) Il est bon d'examiner un théorème d'addition limite que l'on tire de (13) avec $u_\nu(z) = H_\nu^{(2)}(z)$ et $\rho \to \infty$. On a

$$R = \rho \sqrt{1 - \frac{2r\mu}{\rho} + \frac{r^2}{\rho^2}} = \rho - r\mu + O\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(k\rho)^\nu} H_{\nu+n}^{(2)}(k\rho)}{\dfrac{1}{(kR)^\nu} H_\nu^{(2)}(kR)} = \lim_{\rho\to\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{\nu+1/2} i^n e^{-ik(\rho-R)} = i^n e^{-ikr\mu}.$$

On déduit donc de (13)

$$e^{ikr\mu} = 2^{\nu}\Gamma(\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (\nu + n) \frac{J_{\nu+n}(kr)}{(kr)^{\nu}} C_n^{\nu}(\mu).$$

Pour $\nu = 1/2$ on en déduit sans peine le *développement d'une onde plane* $e^{ikr}$ *suivant les polynômes de Legendre*:

$$e^{ikr} = \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (n + 1/2) J_{n+1/2}(kr) P_n(\mu). \qquad (14)$$

Ici $\boldsymbol{k}$ est le vecteur onde, $\mu = \cos\theta$, et $\theta$ l'angle que font les vecteurs $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{r}$ entre eux.

## § 18. Approximation semi-classique

Les tentatives d'établir une jonction entre la physique classique formée vers la fin du XIXe siècle et la mécanique quantique apparue au début du XXe siècle ont conduit à la recherche d'approximations suffisamment bonnes, uniformes pour $\lambda \to +\infty$, des solutions de l'équation différentielle de la forme

$$[k(x) y']' + \lambda r(x) y = 0. \qquad (1)$$

A la représentation approchée des solutions de l'équation en question nous donnerons le nom d'*approximation semi-classique*. Les premières études de cette question, entreprises par Wentzel, Kramers, Brillouin, ont été considérablement approfondies plus tard par Langer et autres chercheurs. Les avantages de l'approximation semi-classique la rendent très commode pour de nombreux problèmes de physique mathématique. Nous allons examiner les grands traits de la méthode d'approximation semi-classique.

**1. Approximation semi-classique des solutions d'équations du second ordre.** Proposons-nous d'étudier le comportement des solutions d'une équation du type (1) pour $\lambda \to +\infty$. Posant dans l'équation $k(x) = \text{const}$ et $r(x) = \text{const}$, on la simplifie au point de voir distinctement que le comportement des solutions dépend du signe des fonctions $k(x)$ et $r(x)$. Nous considérerons donc l'équation (1) dans un domaine où $k(x)$ et $r(x)$ gardent leur signe. Plaçons-nous d'abord dans le cas où les fonctions $k(x)$ et $r(x)$ sont de même signe, par exemple $k(x) > 0$, $r(x) > 0$, sur un intervalle $]a, b[$, et admettent des dérivées continues du premier et du second ordre.

Par changement de variables

$$y(x) = \varphi(x) u(s), \quad s = s(x), \qquad (2)$$

donnons à (1) une forme standard :

$$u''(s) + [\lambda - q(s)]\, u(s) = 0. \tag{3}$$

Portant les expressions (2) dans (1), on s'assure que l'équation (1) se laisse réduire à (3) si les fonctions $\varphi(x)$ et $s(x)$ vérifient les conditions

$$[s'(x)]^2 = \frac{r(x)}{k(x)}, \quad \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = -\frac{1}{2}\frac{(ks')'}{ks'} = -\frac{1}{4}\frac{[k(x)\,r(x)]'}{k(x)\,r(x)}. \tag{4}$$

On a ici

$$q(s) = -\frac{[k(x)\,\varphi'(x)]'}{r(x)\,\varphi(x)}.$$

Utilisant l'équation (4) pour $\varphi(x)$, on peut mettre l'expression de $q(s)$ sous la forme

$$q(s) = \frac{k}{4r}\left[\left(\frac{k'}{k} + \frac{r'}{r}\right)' + \left(\frac{3}{4}\frac{k'}{k} - \frac{1}{4}\frac{r'}{r}\right)\left(\frac{k'}{k} + \frac{r'}{r}\right)\right]. \tag{5}$$

Dans le cas où les fonctions $k(x)$ et $r(x)$ sont de signes différents sur $]a, b[$, on met l'équation (1), par le changement (2), sous une forme analogue à (3) :

$$u''(s) - [\lambda + q(s)]\, u(s) = 0. \tag{6}$$

Les méthodes d'étude des solutions pour $\lambda \to +\infty$ étant les mêmes pour les équations (3) et (6), nous nous bornerons à considérer le cas de l'équation (3).

On a à partir des égalités (4)

$$s(x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{r(t)}{k(t)}}\, dt \quad (a < x_0 < b), \quad \varphi(x) = [k(x)\,r(x)]^{-1/4}.$$

Soient $s(a) = c$ $(c < 0)$, $s(b) = d$ $(d > 0)$. La fonction $s(x)$ est continue et croît de façon monotone sur $]a, b[$. Elle admet donc sa réciproque $x = x(s)$, fonction qui, elle aussi, est continue et croît de façon monotone sur $]c, d[$. La fonction $q(s)$ est continue sur $]c, d[$. Il est naturel de s'attendre à ce que, pour $\lambda \to +\infty$, les solutions de l'équation (3) se confondent à la limite avec les solutions de l'équation simple

$$u'' + \lambda u = 0,$$

i.e. qu'on ait pour $\lambda \to +\infty$ l'égalité approximative

$$u(s) \approx A \cos \mu s + B \sin \mu s,$$

dans laquelle $\mu = \sqrt{\lambda}$ et $A$, $B$ sont des constantes arbitraires, qui dépendent en général de $\mu$.

Pour démontrer cette conjecture, nous emprunterons la méthode proposée par V. Steklov *). Nous allons résoudre l'équation

$$u'' + \mu^2 u = q(s)\, u \tag{3a}$$

par variation des constantes, assimilant le second membre à une fonction connue. Il vient

$$u(s) = \bar{u}(s) + R_\mu(s), \tag{7}$$

où

$$\bar{u}(s) = A \cos \mu s + B \sin \mu s,$$

$$R_\mu(s) = \frac{1}{\mu} \int_0^s \sin \mu (s - s')\, q(s')\, u(s')\, ds'.$$

Montrons que pour $c < c_1 \leqslant s \leqslant d_1 < d$ ($c_1 < 0$, $d_1 > 0$) la contribution du terme $R_\mu(s)$ dans (7) est négligeable lorsque $\mu \to \infty$, i.e.

$$\lim_{\mu \to \infty} \frac{R_\mu(s)}{\overline{M}(\mu)} = 0, \tag{8}$$

où

$$\overline{M}(\mu) = \max_{c_1 \leqslant s \leqslant d_1} |\bar{u}(s)|.$$

L'expression de $R_\mu(s)$ permet de voir que

$$|R_\mu(s)| \leqslant \frac{1}{\mu} LM(\mu), \tag{9}$$

où

$$L = \int_{c_1}^{d_1} |q(s')|\, ds', \quad M(\mu) = \max_{c_1 \leqslant s \leqslant d_1} |u(s)|.$$

Evaluons la quantité $M(\mu)$ pour $\mu \to \infty$. On a à partir de (7) et de (9)

$$|u(s)| \leqslant \overline{M}(\mu) + \frac{1}{\mu} LM(\mu),$$

d'où

$$M(\mu) \leqslant \overline{M}(\mu) + \frac{1}{\mu} LM(\mu).$$

*) Voir В. А. Стеклов, *Об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений*, Харьков, Изд-во ХГУ, 1956 (V. Steklov, *Sur le comportement asymptotique des solutions d'équations différentielles linéaires*).

Résolvant cette inégalité par rapport à $M(\mu)$, on trouve finalement, utilisant (9) pour $\mu > L$

$$\frac{R_\mu(s)}{\overline{M}(\mu)} \leqslant \frac{L}{\mu - L},$$

ce qui démontre l'égalité (8).

Revenant à nos variables initiales, nous obtenons, pour $k(x) > 0$ et $r(x) > 0$ sur $]a, b[$ et $\lambda \to +\infty$, l'expression suivante des solutions de l'équation (1) sur un segment quelconque $[a_1, b_1] \subset ]a, b[$

$$y(x) \approx \frac{1}{\sqrt{k(x)\,p(x)}}\,[A\cos\xi(x) + B\sin\xi(x)], \tag{10}$$

où

$$p(x) = \sqrt{\lambda\,\frac{r(x)}{k(x)}}, \quad \xi(x) = \int_{x_0}^{x} p(t)\,dt.$$

La recherche de la solution approchée (10) au lieu de la solution exacte de (1) est appelée *méthode de résolution semi-classique* de l'équation (1).

Dans le cas où $k(x) > 0$ et $r(x) < 0$, on obtient par analogie

$$y(x) \approx \frac{1}{\sqrt{k(x)\,p(x)}}\,[Ae^{\xi(x)} + Be^{-\xi(x)}], \tag{10a}$$

où

$$p(x) = \sqrt{\lambda\left|\frac{r(x)}{k(x)}\right|}, \quad \xi(x) = \int_{x_0}^{x} p(t)\,dt.$$

Dans la méthode semi-classique, il fallait seulement que $|q(s)| \ll \mu$ dans (3). Les solutions approchées (10), (10a) restent donc applicables non seulement pour des $\lambda$ grands mais aussi pour des $\lambda$ voisins de 1, à condition que $|q(s)| \ll 1$. Ce cas se présente, ainsi que le montre la formule (5), quand les dérivées des fonctions $k(x)$ et $r(x)$ sont petites, i.e. quand les coefficients de l'équation (1) varient lentement et de façon continue.

Il est également intéressant, du point de vue pratique, de dégager une solution approchée de (1) pour $\lambda \to +\infty$ qui reste valable jusqu'aux extrémités de l'intervalle $]a, b[$. A titre d'exemple, nous chercherons une représentation approchée de la solution de (1) pour $a \leqslant x < b$. Si $k(a) > 0$ et $r(a) > 0$, tous les raisonnements conduisant à (10) restent vrais. Nous prendrons donc le cas où l'une au moins des fonctions $k(x)$, $r(x)$ s'annule ou devient égale à l'infini pour $x = a$. Soit

$$k(x) = (x-a)^m\,\bar{k}(x), \qquad r(x) = (x-a)^l\,\bar{r}(x),$$

où $\bar{k}(a) > 0$, $\bar{r}(a) > 0$ et les fonctions $\bar{k}(x)$, $\bar{r}(x)$ admettent des dérivées secondes continues pour $a \leqslant x < b$. Pour que $s(a)$ prenne une valeur finie, nous admettrons que $\frac{1}{2}(l-m) > -1$. Transformons en conséquence les expressions de $s(x)$ et de $q(s)$ pour $x_0 = a$:

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{\frac{\bar{r}(t)}{\bar{k}(t)}}\,(t-a)^{(l-m)/2}\,dt, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} q(s) = (x-a)^{m-l-2}\frac{\bar{k}(x)}{4\bar{r}(x)}\Big\{&\frac{(l+m)(3m-l-4)}{4} + \\ &+\frac{x-a}{2}\left[(3m+l)\frac{\bar{k}'}{\bar{k}} + (m-l)\frac{\bar{r}'}{\bar{r}}\right] + \\ &+(x-a)^2\left[\left(\frac{\bar{k}'}{\bar{k}}+\frac{\bar{r}'}{\bar{r}}\right)' + \left(\frac{3}{4}\frac{\bar{k}'}{\bar{k}} - \frac{1}{4}\frac{\bar{r}'}{\bar{r}}\right)\left(\frac{\bar{k}'}{\bar{k}}+\frac{\bar{r}'}{\bar{r}}\right)\right]\Big\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Si $x \approx a$, on a

$$s(x) \approx \sqrt{\frac{\bar{r}(a)}{\bar{k}(a)}}\,\frac{(x-a)^{(l-m+2)/2}}{\frac{1}{2}(l-m+2)},$$

ce qui veut dire que l'expression de $q(s)$ peut être mise sous la forme

$$q(s) = \frac{\nu^2 - 1/4}{s^2} + s^{\gamma-2} f(s),$$

où

$$\gamma = \frac{2}{l-m+2} > 0, \quad \nu = \frac{|m-1|}{l-m+2},$$

et la fonction $f(s)$ est continue pour $0 \leqslant s < s(b)$. Nous remarquons que la fonction $q(s)$ admet dans ce cas une singularité pour $s = 0$. Pour appliquer la méthode de Steklov, il est donc commode de cerner la singularité principale de $q(s)$ en mettant l'équation (3) sous la forme

$$u'' + \left(\mu^2 - \frac{\nu^2 - 1/4}{s^2}\right)u = s^{\gamma-2} f(s)\,u \quad (\mu = \sqrt{\lambda}) \tag{13}$$

et de résoudre cette équation par variation des constantes en assimilant le second membre à une fonction connue. Puisque l'équation

$$u'' + \left(\mu^2 - \frac{\nu^2 - 1/4}{s^2}\right)u = 0$$

est une équation de Lommel et admet donc comme solution

$$u = A v_\nu(\mu s) + B v_{-\nu}(\mu s),$$

où $v_\nu(z) = \sqrt{z} J_\nu(z)$ et $A$, $B$ sont des constantes, on obtient la solution de (13) sous la forme

$$u(s) = Av_\nu(\mu s) + Bv_{-\nu}(\mu s) + R_\mu(s), \tag{14}$$

où

$$R_\mu(s) = \int_{s_0}^{s} K_\mu(s, s')(s')^{\gamma-2} f(s') u(s') ds',$$

$$K_\mu(s, s') = \frac{\pi}{2\mu \sin \pi\nu} [v_\nu(\mu s) v_{-\nu}(\mu s') - v_\nu(\mu s') v_{-\nu}(\mu s)].$$

On montre que $R_\mu(s)$ dans (14) est négligeable pour $\mu \to +\infty$. En évaluant $R_\mu(s)$, il est commode de prendre $s_0 > 0$ quand $B \neq 0$ et $s_0 = 0$ quand $B = 0$. Les évaluations de $R_\mu(s)$ se font par la même méthode que précédemment, mais elles présentent des difficultés supplémentaires d'ordre technique: en évaluant les fonctions $v_{\pm\nu}(\mu s)$ qui apparaissent en l'occurrence au lieu de $\cos \mu s$ et $\sin \mu s$, on est obligé de considérer séparément les grandes et les petites valeurs de $\mu s$:

$$v_{\pm\nu}(\mu s) \leqslant \begin{cases} C(\mu s)^{\pm\nu+1/2} & \text{pour} \quad \mu s \leqslant 1, \\ C & \text{pour} \quad \mu s > 1 \end{cases}$$

($C$ est une constante).

Revenant aux variables initiales on obtient, dans le cas où $k(x) = (x-a)^m \bar{k}(x)$, $r(x) = (x-a)^l \bar{r}(x)$, $l - m + 2 > 0$, les fonctions $\bar{k}(x)$, $\bar{r}(x)$ prennent des valeurs positives et admettent des dérivées secondes continues pour $a \leqslant x < b$, que les solutions approchées de l'équation (1) pour $\lambda \to +\infty$, $a \leqslant x \leqslant b_1 < b$, se présentent sous la forme

$$y(x) \approx \sqrt{\frac{\xi(x)}{k(x) p(x)}} \{AJ_\nu[\xi(x)] + BJ_{-\nu}[\xi(x)]\}, \tag{15}$$

$$p(x) = \sqrt{\lambda \frac{r(x)}{k(x)}}, \quad \xi(x) = \int_a^x p(t) dt; \quad \nu \neq 0, 1, \ldots$$

Pour des $\nu$ entiers, il convient de remplacer $J_{-\nu}(\xi)$ par $Y_\nu(\xi)$. Remarquons qu'en remplaçant, pour $\xi(x) \gg 1$, les fonctions de Bessel dans (15) par le premier terme de leur représentation asymptotique, on obtient une formule équivalente à (10). Si $k(x) > 0$ et $r(x) < 0$, on prendra au lieu de (15)

$$y(x) \approx \sqrt{\frac{\xi(x)}{k(x) p(x)}} \{AI_\nu[\xi(x)] + BK_\nu[\xi(x)]\}, \tag{16}$$

$$p(x) = \sqrt{\lambda \left| \frac{r(x)}{k(x)} \right|}, \quad \xi(x) = \int_a^x p(t) dt.$$

On retrouve des formules analogues valables dans le domaine $a < a_1 \leqslant x \leqslant b$ si les fonctions $k(x)$ et $r(x)$ sont du type

$$k(x) = (b-x)^m \bar{k}(x), \quad r(x) = (b-x)^l \bar{r}(x),$$
$$\bar{k}(x) > 0, \quad \bar{r}(x) > 0.$$

Nous venons d'exposer la méthode de représentation asymptotique des solutions de l'équation (1) pour $\lambda \to +\infty$. Maintenant nous chercherons une telle représentation dans certains cas particuliers intéressants.

**2. Représentations asymptotiques des polynômes orthogonaux classiques pour *n* grand.** Nous allons établir une expression approchée des polynômes de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ pour $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ et $x \in [-1, 1[$ en donnant à $n$ des valeurs suffisamment élevées. La fonction $y(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ vérifie l'équation différentielle (1) pour

$$k(x) = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}, \quad r(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta},$$
$$\lambda = n(n+\alpha+\beta+1).$$

On a en l'occurrence $m = \beta+1$, $l = \beta$, $\nu = \beta$. Si $n \to \infty$, on a $\lambda \to +\infty$. Pour $-1 \leqslant x \leqslant 1-\delta$ on a

$$y(x) \approx \frac{\sqrt{\xi}}{(1-x)^{\alpha/2+1/4}(1+x)^{\beta/2+1/4}}[AJ_\beta(\xi) + BJ_{-\beta}(\xi)],$$

où

$$\xi = \xi(x) = \mu \int_{-1}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \mu \arccos(-x), \quad \mu = \sqrt{\lambda}.$$

Puisqu'il existe une limite

$$\lim_{x \to -1} y(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(-1) = (-1)^n \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)\, n!},$$

on a

$$B = 0,$$

$$A = \lim_{x \to -1} \frac{(1-x)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}(1+x)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}\, y(x)}{\sqrt{\xi}\, J_\beta(\xi)} =$$
$$= 2^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} P_n^{(\alpha, \beta)}(-1)\, 2^\beta \Gamma(\beta+1) \lim_{x \to -1} \left(\frac{\sqrt{1+x}}{\xi}\right)^{\beta+\frac{1}{2}}.$$

D'après la règle de L'Hospital $\lim\limits_{x \to -1} \frac{\sqrt{1+x}}{\xi(x)} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{1}{2\sqrt{1+x}\,\xi'(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Aussi $A = (-1)^n \frac{2^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\,\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,\mu^{\beta+1/2}}$, $\mu = \sqrt{n(n+\alpha+\beta+1)}$.

En posant $x = -\cos\theta$, on obtient pour $0 \leqslant \theta \leqslant \pi - \delta$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-\cos\theta) \approx$$
$$\approx \frac{(-1)^n \Gamma(n+\beta+1)\sqrt{\theta/2}}{n!\,\mu^\beta (\cos(\theta/2))^{\alpha+1/2} (\sin(\theta/2))^{\beta+1/2}} J_\beta(\mu\theta). \tag{17}$$

L'expression approchée des polynômes de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ dans le domaine $-1 < x \leqslant 1$ se déduit facilement de (17) en faisant intervenir la relation

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(-x).$$

Si $x \in [-1+\delta, 1-\delta]$, l'expression approchée de $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ peut être simplifiée à l'aide de la représentation asymptotique de la fonction $J_\beta(\mu\theta)$ pour $\mu\theta \to +\infty$ et de celle de la fonction $\Gamma(z)$ pour $z \to \infty$ (voir Appendice A):

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) \approx \frac{\cos\{[n+(\alpha+\beta+1)/2]\theta - (2\alpha+1)\pi/4\}}{\sqrt{\pi n}(\sin(\theta/2))^{\alpha+1/2}(\cos(\theta/2))^{\beta+1/2}} \tag{18}$$
$$(0 < \delta \leqslant \theta \leqslant \pi - \delta).$$

D'où l'on tire pour $\alpha = \beta = 0$ une représentation asymptotique pour les polynômes de Legendre:

$$P_n(\cos\theta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \frac{\cos[(n+1/2)\theta - \pi/4]}{\sqrt{\sin\theta}}$$

On établit d'une façon analogue l'expression approchée des polynômes de Laguerre $L_n^\alpha(x)$ pour $x > 0$ et des $n$ assez grands. On a en particulier pour $0 < \delta \leqslant x \leqslant N < \infty$

$$L_n^\alpha(x) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{x/2} x^{-\alpha/2-1/4} n^{\alpha/2-1/4} \cos\left[2\sqrt{nx} - (2\alpha+1)\frac{\pi}{4}\right]. \tag{19}$$

Si $\alpha = \pm 1/2$, la représentation (19) reste valable jusque pour $x = 0$, car on a alors $\nu = \pm 1/2$ et l'équation (13) n'a aucune singularité pour $s = 0$.

Pour les polynômes d'Hermite, les formules correspondantes s'obtiennent à partir de (19) à l'aide des formules (14) et (15) du § 6 exprimant les polynômes d'Hermite $H_n(x)$ en fonction de ceux de Laguerre:

$$H_n(x) \approx \sqrt{2}\left(\frac{2n}{e}\right)^{n/2} e^{x^2/2} \cos\left(\sqrt{2n}\,x - \frac{\pi n}{2}\right) \tag{20}$$
$$(|x| \leqslant N < \infty).$$

*Remarque.* Nous avons obtenu la représentation asymptotique (18) en posant $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$. Elle reste cependant vraie pour toute valeur réelle de $\alpha$ et de $\beta$. On le démontre par récurrence, en admet-

tant que la formule (18) soit vraie pour les polynômes $P_n^{(\alpha+1,\ \beta+1)}(\cos\theta)$ et $P_n^{(\alpha+2,\ \beta+2)}(\cos\theta)$. Faisant intervenir l'équation différentielle pour les polynômes de Jacobi et appliquant la formule de dérivation (6) du § 5, on obtient

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = -\frac{1}{\lambda_n}\left[\tau(x)\frac{n+\alpha+\beta+1}{2}P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x) + \right.$$
$$\left. + \sigma(x)\frac{(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta+2)}{4}P_{n-2}^{(\alpha+2,\beta+2)}(x)\right],$$

où

$$\lambda_n = n(n+\alpha+\beta+1), \quad \tau(x) = \beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x,$$
$$\sigma(x) = 1-x^2.$$

D'où

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) = -\left[\frac{\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)\cos\theta}{2n}P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\cos\theta) + \right.$$
$$\left. + \frac{\sin^2\theta}{4}\left(1+\frac{\alpha+\beta+2}{n}\right)P_{n-2}^{(\alpha+2,\beta+2)}(\cos\theta)\right].$$

En portant dans le second membre les représentations asymptotiques de $P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\cos\theta)$ et de $P_{n-2}^{(\alpha+2,\beta+2)}(\cos\theta)$ et en conservant les termes dominants, on obtient

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) \approx -\frac{\sin^2\theta}{4}P_{n-2}^{(\alpha+2,\beta+2)}(\cos\theta) \approx$$
$$\approx -\frac{\sin^2\theta}{4}\frac{\cos\left\{\left[n-2+\frac{1}{2}(\alpha+\beta+5)\right]\theta-(2\alpha+5)\frac{\pi}{4}\right\}}{\sqrt{\pi n}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+\frac{5}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+\frac{5}{2}}} =$$
$$= \frac{\cos\left\{\left[n+\frac{1}{2}(\alpha+\beta+1)\right]\theta-(2\alpha+1)\frac{\pi}{4}\right\}}{\sqrt{\pi n}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+\frac{1}{2}}},$$

ce qui nous ramène à la formule (18). La validité de (19) pour toute valeur réelle de $\alpha$ se démontre d'une façon analogue.

**3. Approximation semi-classique pour des équations admettant une singularité. Cas d'un champ central.** Pour étudier le mouvement d'une particule dans un champ central, il est bon d'établir une approximation semi-classique pour l'équation de la forme

$$u'' + r(x)u = 0 \tag{21}$$

dans laquelle la fonction $x^2 r(x)$ est continue et admet des dérivées première et seconde continues quand $0 \leqslant x \leqslant b$. Dans le voisinage

de $x = 0$, l'approximation obtenue précédemment pour (21) cesse d'être vraie. Or, en faisant le changement de variables $x = e^z$, $u = e^{z/2}v(z)$, on met cette équation sous la forme

$$v''(z) + r_1(z)\, v = 0, \tag{22}$$

où

$$r_1(z) = -\frac{1}{4} + x^2 r(x)\Big|_{x=e^z}.$$

Pour $z \to -\infty$ (donc pour $x \to 0$) la fonction $r_1(z)$ diffère peu d'une constante égale à $-\frac{1}{4} + \lim\limits_{x\to 0} x^2 r(x)$. De plus on a $\lim\limits_{z\to-\infty} r_1^{(k)}(z) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Aussi la fonction $r_1(z)$ et ses dérivées varient-elles lentement quand $z$ prend des valeurs négatives suffisamment grandes en module, donc l'équation (22) est justiciable de l'approximation semi-classique. Lorsque celle-ci reste applicable à l'équation (22) pour des $z$ vérifiant les conditions qui leur sont imposées, on obtient, en revenant aux variables initiales, une solution approchée de l'équation (21) sous sa forme (15), (16), mais avec $r(x) - 1/(4x^2)$ au lieu de $r(x)$.

C'est ainsi par exemple qu'en cherchant en coordonnées sphériques la solution de l'équation de Schrödinger

$$-\frac{1}{2}R'' + \left[U(r) + \frac{l(l+1)}{2r^2}\right]R = ER$$

pour la partie radiale $R(r)$ de la fonction d'onde (où $r$ est la distance de l'origine des coordonnées, $U(r)$ l'énergie potentielle, $E$ l'énergie globale de la particule, $l = 0, 1, 2, \ldots$ le nombre quantique orbital), on obtient en approximation semi-classique l'expression

$$R(r) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\xi}{p}}\,[AJ_{1/3}(\xi) + BJ_{-1/3}(\xi)] & (r \geqslant r_0), \\ \sqrt{\dfrac{\xi}{p}}\,[CI_{1/3}(\xi) + DK_{1/3}(\xi)] & (r \leqslant r_0), \end{cases}$$

où

$$p = p(r) = \sqrt{\left|2[E - U(r)] - \frac{(l+{}^1/_2)^2}{r^2}\right|},$$

$$\xi = \xi(r) = \left|\int_{r_0}^{r} p(r')\, dr'\right|,$$

$r_0$ est racine (supposée simple) de l'équation $p(r) = 0$.

Puisque la fonction $R(r)$ doit être bornée pour $r \to 0$, i.e. pour $\xi \to \infty$, il y a lieu de poser $C = 0$. Comme les valeurs fournies par les deux expressions de $R(r)$ (resp. $R'(r)$) sont conjuguées pour $r = r_0$, les constantes $A$ et $B$ se laissent exprimer en fonction de la

constante $D$. En développant le radicande dans la formule de $p(r)$ suivant les puissances de $(r - r_0)$, on s'assure sans peine que les fonctions $\frac{p(r)}{\sqrt{|r-r_0|}}$, $\frac{\xi(r)}{|r-r_0|^{3/2}}$ et leurs dérivées premières sont continues en $r = r_0$. Les conditions de conjugaison de $R(r)$ (resp. $R'(r)$) en $r = r_0$ impliquent donc des conditions de conjugaison analogues pour la fonction

$$\Phi(r) = (\xi/2)^{-1/3}\sqrt{p/\xi}\,R(r)$$

et sa dérivée. Il vient

$$\Phi(r) = \begin{cases} \dfrac{A\left(\dfrac{\xi}{2}\right)^{2/3}}{\Gamma\left(\dfrac{4}{3}\right)} + \dfrac{B}{\Gamma\left(\dfrac{2}{3}\right)} + O\left[(r-r_0)^3\right] & (r \geqslant r_0), \\ \dfrac{D\pi}{2\sin\dfrac{\pi}{3}}\left[\dfrac{1}{\Gamma\left(\dfrac{2}{3}\right)} - \dfrac{\left(\dfrac{\xi}{2}\right)^{2/3}}{\Gamma\left(\dfrac{4}{3}\right)}\right] + O\left[(r-r_0)^3\right] & (r \leqslant r_0). \end{cases}$$

Puisque la fonction $\frac{\xi^{2/3}}{|r-r_0|}$ est continue pour $r = r_0$, on obtient en égalant les coefficients des mêmes puissances de $(r - r_0)$ :

$$A = B = \frac{\pi}{\sqrt{3}} D.$$

**4. Comportement asymptotique des fonctions cylindriques d'ordre élevé. Formules de Langer.** La méthode décrite plus haut permet de déterminer le comportement asymptotique des fonctions cylindriques pour des $\nu$ élevés. Prenons l'équation de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\,y = 0$$

et réduisons-la à la forme (21) en opérant le changement $u(x) = \sqrt{x}\,y(\nu x)$ (cf. l'équation de Lommel). La fonction $u(x)$ satisfait à l'équation

$$u'' + r(x)\,u = 0, \quad r(x) = \nu^2 - \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2}.$$

En appliquant le raisonnement développé dans le n° 3 ci-dessus, on peut poser $x = e^z$ et $u = e^{z/2}v(z)$. On obtient alors l'équation

$$v'' + r_1(z)\,v = 0, \quad r_1(z) = \nu^2(e^{2z} - 1). \tag{23}$$

Puisque $\nu \to \infty$, l'équation (23) admet une approximation semi-classique. En reprenant les variables initiales, on écrit la fonction

$u(x)$ sous la forme

$$u(x)=\sqrt{\frac{\xi}{p}}\begin{cases}AI_{1/3}(\xi)+BK_{1/3}(\xi) & (x\leqslant 1),\\ CH^{(1)}_{1/3}(\xi)+DH^{(2)}_{1/3}(\xi) & (x\geqslant 1).\end{cases} \tag{24}$$

Ici

$$p=p(x)=\nu s/x,\quad s=\sqrt{|1-x^2|},$$

$$\xi=\xi(x)=\left|\int_1^x p(t)\,dt\right|=\begin{cases}\nu(\operatorname{arth} s-s) & (x\leqslant 1),\\ \nu(s-\operatorname{arc\,tg} s) & (x\geqslant 1).\end{cases}$$

Posons par exemple $u(x)=\sqrt{x}H^{(1)}_\nu(\nu x)$. Pour connaître les coefficients $C$ et $D$, identifions les termes dominants de la représentation asymptotique pour $x\to\infty$ dans le premier et le second membre de (24). Puisqu'on a pour $x\to\infty$ et un $\nu$ fixe

$$s(x)=x+O(1/x),\qquad \xi(x)=\nu(x-\pi/2)+O(1/x),$$

li vient

$$\sqrt{x}\,H^{(1)}_\nu(\nu x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi\nu}}\,e^{i(\nu x-\pi\nu/2-\pi/4)}=$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi\nu}}\{Ce^{i[\nu(x-\pi/2)-\pi/6-\pi/4]}+De^{-i[\nu(x-\pi/2)-\pi/6-\pi/4]}\},$$

d'où il ressort que

$$D=0,\ C=e^{i\pi/6}.$$

Les coefficients $A$ et $B$ se cherchent à partir de la condition de conjugaison des expressions de la fonction $u(x)$ (resp. $u'(x)$) en $x=1$. On obtient

$$A=-2i,\quad B=\frac{2}{\pi}e^{-i\pi/3},$$

ce qui nous conduit à l'approximation semi-classique pour $\nu$ grand:

$$H^{(1)}_\nu(\nu x)=\begin{cases}2\sqrt{\dfrac{\operatorname{arth} s}{s}-1}\left[-iI_{1/3}(\xi)+\dfrac{e^{-i\pi/3}}{\pi}K_{1/3}(\xi)\right] & (x\leqslant 1),\\ \sqrt{1-\dfrac{\operatorname{arc\,tg} s}{s}}\,e^{i\pi/6}H^{(1)}_{1/3}(\xi) & (x\geqslant 1).\end{cases} \tag{25}$$

Identifiant les parties réelles dans (25), on obtient une approximation semi-classique de la fonction de Bessel $J_\nu(\nu x)$ pour $\nu$ grand:

$$J_\nu(\nu x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{\operatorname{arth} s}{s}-1}\,K_{1/3}(\xi) & (x\leqslant 1),\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\dfrac{\operatorname{arc\,tg} s}{s}}\,[J_{-1/3}(\xi)+J_{1/3}(\xi)] & (x\geqslant 1).\end{cases} \tag{26}$$

Les formules (25) et (26) sont appelées *formules de Langer.* Comme le montrent les estimations exactes, elles fournissent une approximation uniforme des fonctions cylindriques à $O\left(\frac{1}{\nu^{4/3}}\right)$ près *). Il est curieux que la formule (26) définit correctement l'allure de la fonction $J_\nu(\nu x)$ pour $x \to 0$ malgré le fait qu'elle a été établie à l'aide des représentations asymptotiques des formules cylindriques pour $x \to \infty$.

**5. Recherche des valeurs propres de l'énergie dans l'équation de Schrödinger par approximation semi-classique. Formule de Bohr-Sommerfeld.** Les solutions de l'équation de Schrödinger

$$-\frac{1}{2}\psi''(x) + U(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (-\infty < x < \infty) \tag{27}$$

définissant le mouvement d'une particule dans un champ d'énergie potentielle $U(x)$ ne se laissent expliciter que pour quelques formes particulières de la fonction $U(x)$ ($E$ est l'énergie globale de la particule ; nous utilisons un système d'unités dans lequel la masse de la particule $m$ et la constante de Planck $\hbar$ sont égales à l'unité). Cela devient possible, par exemple, quand on a réussi à réduire (27) à une équation généralisée du type hypergéométrique (voir le théorème dans le § 9, n° 2). Sous ce rapport, les méthodes de résolution approchée de l'équation (27) revêtent une importance particulière.

Cherchons les valeurs propres de l'énergie dans l'équation de Schrödinger (27) par la méthode d'approximation semi-classique. Il s'agit de chercher des valeurs de l'énergie $E$ telles qu'il y ait $E - U(x) < 0$ pour $x \to \pm\infty$ et que la fonction $\psi(x)$ vérifie la condition de normalisation

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1. \tag{28}$$

Soit

$$E - U(x) \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad x_1 \leqslant x \leqslant x_2$$

(ce domaine porte le nom de *domaine du mouvement classique*). Soit en plus

$$E - U(x) < 0 \quad \text{pour} \quad x < x_1 \quad \text{et} \quad x > x_2,$$

$x_1$ et $x_2$ étant des racines simples de l'équation $E = U(x)$ (en mécanique quantique les points $x_1$, $x_2$ sont appelés points de retour).

---

*) Langer R. E., *On the asymptotic solutions of ordinary differential equations with an application to the Bessel functions of large order*, Trans. Amer. Math. Soc. 33 (1931), 23-64.

En résolvant le problème posé, nous supposerons que les intégrales $\int_{-\infty}^{x_1} p(x)\,dx$, $\int_{x_2}^{\infty} p(x)\,dx$ sont divergentes ($p(x)=\sqrt{2\,|E-U(x)|}$) et que l'intégrale $\int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx$ est suffisamment élevée. On a en approximation semi-classique pour $-\infty < x \leqslant x_2$

$$\psi(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{\xi}{p}}\,[A_1 I_{1/3}(\xi)+B_1 K_{1/3}(\xi)] & \text{pour } x\leqslant x_1,\\ \sqrt{\frac{\xi}{p}}\,[A_2 J_{-1/3}(\xi)+B_2 J_{1/3}(\xi)] & \text{pour } x_1\leqslant x\leqslant x_2,\end{cases} \tag{29}$$

$$\xi=\left|\int_{x_1}^{x} p(s)\,ds\right|.$$

Pour que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2\,dx$ soit convergente, on doit poser $A_1 = 0$. Les constantes $A_2$, $B_2$ se laissent exprimer en fonction de $B_1$ à partir de la condition que les expressions de la fonction $\psi(x)$ (resp. $\psi'(x)$) soient conjuguées en $x = x_1$ (voir l'exemple dans le n° 3). On a alors $A_2 = B_2 = \frac{\pi}{\sqrt{3}} B_1$. Ainsi donc, pour $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ on obtient

$$\psi(x)=A_2\sqrt{\frac{\xi}{p}}\,[J_{-1/3}(\xi)+J_{1/3}(\xi)]. \tag{30}$$

Choisissant des valeurs de $x$ pour lesquelles $\xi(x)$ prend des valeurs suffisamment élevées, on peut se servir de la représentation asymptotique de $J_{\pm 1/3}(z)$:

$$J_{\pm 1/3}(z)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z\mp\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right).$$

Il vient

$$\psi(x)=\frac{C_1}{\sqrt{p(x)}}\cos\left[\int_{x_1}^{x} p(s)\,ds-\frac{\pi}{4}\right] \tag{31}$$

($C_1$ est une constante).

Par un raisonnement analogue, on aboutit à l'expression de $\psi(x)$ pour $x_1 < x \leqslant x_2$ à partir du comportement de cette fonction

pour $x \to \infty$. En prenant des valeurs de $x$ pour lesquelles $\int\limits_x^{x_2} p(s)\,ds$ prend des valeurs suffisamment élevées, on obtient

$$\psi(x) = \frac{C_2}{\sqrt{p(x)}} \cos\left[\int\limits_x^{x_2} p(s)\,ds - \frac{\pi}{4}\right] \tag{32}$$

($C_2$ est une constante).

Choisissons des valeurs de $x$ pour lesquelles $\int\limits_{x_1}^{x} p(s)\,ds$ et $\int\limits_x^{x_2} p(s)\,ds$ sont grandes toutes les deux. On a alors deux expressions, (31) et (32), de la fonction $\psi(x)$. Ces deux expressions ne se confondront que si

$$\int\limits_{x_1}^{x} p(s)\,ds + \int\limits_{x}^{x_2} p(s)\,ds = \int\limits_{x_1}^{x_2} p(s)\,ds = \pi\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0,\ 1,\ 2\ \ldots \tag{33}$$

On voit sans peine que $n$ est le nombre des zéros de la fonction $\psi(x)$ (cette dernière ne s'annulant que pour $x_1 < x < x_2$). On a par ailleurs $C_2 = (-1)^n C_1$. Ainsi donc, en approximation semi-classique, les valeurs de l'énergie du spectre discret $E = E_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) doivent satisfaire à la condition (33). En mécanique classique cette condition est appelée *condition de Bohr-Sommerfeld*.

La condition de Bohr-Sommerfeld peut aussi être établie pour une particule mobile dans un champ central $U(r)$. En reprenant le même raisonnement et en utilisant les résultats du n° 3, nous obtenons la condition de Bohr-Sommerfeld imposée aux valeurs de l'énergie $E = E_{nl}$ du spectre discret sous la forme suivante :

$$\int\limits_{r_1(E)}^{r_2(E)} p(r)\,dr = \pi\left(n + \frac{1}{2}\right), \tag{34}$$

$$p(r) = \sqrt{2\left|E - U(r) - \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2}{2r^2}\right|}, \quad p(r)\big|_{r=r_1,\, r_2} = 0.$$

*Exemple 1.* Cherchons en approximation semi-classique les niveaux d'énergie d'une particule mobile dans un champ $U(x) = \frac{\mu\omega^2}{2} x^2$ (oscillateur harmonique linéaire).

Dans le § 9 nous avons obtenu la solution exacte de ce problème. Dans les unités du § 9 l'équation de Schrödinger (27) s'écrira

$$-\frac{1}{2}\psi''+\frac{x^2}{2}\psi=\varepsilon\psi \quad (E=\hbar\omega\varepsilon).$$

On a en l'occurrence

$$p(x)=\sqrt{2\varepsilon-x^2},\quad x_1=-\sqrt{2\varepsilon},\quad x_2=\sqrt{2\varepsilon}.$$

Les niveaux d'énergie sont définis par la condition de Bohr-Sommerfeld :

$$\int_{-\sqrt{2\varepsilon}}^{\sqrt{2\varepsilon}}\sqrt{2\varepsilon-x^2}\,dx=\pi\left(n+\frac{1}{2}\right). \tag{35}$$

On sait que

$$\int\sqrt{\alpha x^2+\beta}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{\alpha x^2+\beta}+\frac{\beta}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}.$$

Aussi

$$\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2\varepsilon-x^2}\,dx=\varepsilon\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{2\varepsilon-x^2}}=\varepsilon\arcsin\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon}}\Big|_{x_1}^{x_2}=\pi\varepsilon.$$

La condition (35) nous donne

$$\varepsilon=\varepsilon_n=n+\frac{1}{2},$$

valeur qui se confond avec la solution exacte même si la condition $\int_{x_1}^{x_2}p(x)\,dx\gg 1$ n'est pas satisfaite.

*Exemple 2.* Cherchons en approximation semi-classique les niveaux d'énergie d'un électron dans un champ $U(r)=-\frac{Z}{r}$ (en unités atomiques).

Dans ce cas on doit poser dans la condition (34) $U(r)=-\frac{Z}{r}$. L'intégration par parties nous donne

$$\int_{r_1}^{r_2}p(r)\,dr=rp(r)\Big|_{r_1}^{r_2}-\int_{r_1}^{r_2}\frac{r\left(-\frac{Z}{r^2}+\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{r^3}\right)}{\sqrt{2\left[E+\frac{Z}{r}-\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}\right]}}\,dr=$$

$$= Z \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{2\left[Er^2 + Zr - \frac{1}{2}\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\right]}} +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 dx}{\sqrt{2\left[E + Zx - \frac{1}{2}\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 x^2\right]}} =$$

$$= \pi \left(\frac{Z}{\sqrt{-2E}} - l - \frac{1}{2}\right) \quad \left(x = \frac{1}{r}, \quad E < 0\right).$$

Portant cette expression de l'intégrale dans (34), on obtient

$$E = E_{nl} = -\frac{Z^2}{2(n+l+1)^2},$$

valeur qui se confond avec la solution exacte quels que soient $n$ et $l$.

CHAPITRE IV

# FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES

Dans les chapitres II et III nous avons étudié les propriétés des polynômes orthogonaux classiques et des fonctions cylindriques. Ces fonctions vérifient des équations différentielles qui représentent des cas particuliers d'une équation généralisée du type hypergéométrique

$$u'' + \frac{\widetilde{\tau}(z)}{\sigma(z)} u' + \frac{\widetilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)} u = 0. \tag{1}$$

Ici $\sigma(z)$ et $\widetilde{\sigma}(z)$ sont des polynômes de degré non supérieur à 2, et $\widetilde{\tau}(z)$ un polynôme de degré non supérieur à 1.

Les résultats obtenus dans le Chapitre premier permettent d'étudier les propriétés des solutions d'une équation généralisée arbitraire du type hypergéométrique. En faisant le changement de variable $u = \varphi(z)\, y$ et en choisissant convenablement la fonction $\varphi(z)$, on réduit les équations du type (1) à des équations du type hypergéométrique

$$\sigma(z)\, y'' + \tau(z)\, y' + \lambda y = 0 \tag{2}$$

dans lesquelles $\tau(z)$ est un polynôme de degré non supérieur à 1, et $\lambda$ une constante (voir § 1). Le procédé de recherche des solutions particulières de l'équation (2) a été proposé au § 3. Dans ce chapitre, nous allons étudier ces solutions de plus près.

## § 19. Equation du type hypergéométrique et sa résolution

**1. Réduction à la forme canonique.** Proposons-nous de réduire l'équation du type hypergéométrique (2) à la forme canonique en opérant un changement linéaire de la variable indépendante. Trois cas sont à considérer alors, en fonction du degré du polynôme $\sigma(z)$.

1) Soit $\sigma(z)$ un polynôme du second degré, $\sigma(z) = (z - a)(b - z)$, $a \neq b$ *). Faisons dans (2) le changement $z = a + (b - a)\, s$; il

*) Si le polynôme $\sigma(z)$ admet des racines multiples, on peut réduire (2) à une équation du type hypergéométrique pour laquelle $\sigma(z)$ est un polynôme du premier degré (voir § 1).

vient

$$s(1-s)y''+\frac{1}{b-a}\tau[a+(b-a)s]y'+\lambda y=0.$$

De toute évidence, il est toujours possible de choisir des paramètres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ tels que l'équation obtenue puisse s'écrire comme suit:

$$s(1-s)y''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)s]y'-\alpha\beta y=0.$$

Une telle équation s'appelle *équation hypergéométrique* *).

2) Soit $\sigma(z)$ un polynôme du premier degré, $\sigma(z)=z-a$. Posant $z=a+bs$, mettons (2) sous la forme

$$sy''+\tau(a+bs)y'+\lambda by=0. \qquad (3)$$

Si $\tau'(z)=0$, alors, quel que soit $b$, l'équation (3) se réduit à l'équation de Lommel (4) du § 13 dont les solutions se laissent exprimer à l'aide de fonctions cylindriques. Si au contraire $\tau'(z)\neq 0$, on a pour $b=-1/\tau'(z)$

$$\tau(a+bs)=\tau(a)+\tau'(a)bs=\tau(a)-s.$$

Introduisons les notations $\gamma=\tau(a)$ et $\alpha=-\lambda b$. L'équation (3) s'écrira alors

$$sy''+(\gamma-s)y'-\alpha y=0.$$

Cette équation porte le nom d'*équation hypergéométrique dégénérée.*

3) Si la fonction $\sigma(z)$ est indépendante de $z$, on peut poser $\sigma(z)=1$. Pour $\tau'(z)=0$ l'équation (2) est une équation linéaire homogène à coefficients constants. Pour $\tau'(z)\neq 0$, on peut, en faisant le changement $z=a+bs$, mettre l'équation (2) sous la forme

$$y''+b\tau(a+bs)y'+\lambda b^2y=0.$$

Par un choix approprié des constantes $a$, $b$ et $\nu$, cette dernière équation peut être mise sous la forme

$$y''-2sy'+2\nu y=0.$$

C'est l'*équation d'Hermite* (pour $\nu=n$ elle se confond avec l'équation pour les polynômes d'Hermite).

**2. Recherche des solutions particulières.** Les solutions particulières de l'équation hypergéométrique et de l'équation hypergéométrique dégénérée, de même que celles de l'équation d'Hermite, peuvent se chercher par la méthode décrite dans le § 3. Là également on propose des transformations qui permettent d'en augmenter le nombre de solutions particulières. Rappelons ces transformations.

L'équation du type hypergéométrique

$$\sigma(z)u''+\tau(z)u'+\lambda u=0$$

*) On dit souvent aussi équation de Gauss.

est un cas particulier de l'équation (1) pour $\tilde{\tau}(z) = \tau(z)$, $\tilde{\sigma}(z) = \lambda\sigma(z)$. Elle se laisse donc transformer en une équation du même type moyennant le changement $u = \varphi(z)\, y$ (voir § 1) à condition que $\varphi(z)$ vérifie l'équation différentielle

$$\varphi'/\varphi = \pi(z)/\sigma(z),$$

où

$$\pi(z) = \frac{\sigma'-\tau}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'-\tau}{2}\right)^2 - \varkappa\sigma} \quad (\varkappa = \lambda - k)$$

est un polynôme de degré non supérieur à 1. La constante $\varkappa$ est assujettie à la condition que le discriminant du polynôme du second degré du radicande soit nul.

Pour l'équation hypergéométrique

$$z(1-z)\,u'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)\,z]\,u' - \alpha\beta u = 0 \tag{4}$$

on a

$$\left(\frac{\sigma'-\tau}{2}\right)^2 - \varkappa\sigma = \left[\frac{1-\gamma+(\alpha+\beta-1)\,z}{2}\right]^2 - \varkappa z(1-z).$$

Annulant le discriminant de ce trinôme du second degré, on obtient les deux valeurs possibles suivantes de $\varkappa$:

$$\varkappa_1 = (1-\gamma)(\alpha+\beta-\gamma), \quad \varkappa_2 = 0.$$

Dans le premier cas le polynôme $\pi(z)$ et la fonction $\varphi(z)$ peuvent s'écrire:

a) $\pi(z) = (1-\gamma)(1-z)$, $\varphi(z) = z^{1-\gamma}$;

b) $\pi(z) = (\alpha+\beta-\gamma)\,z$, $\varphi(z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}$.

En faisant le changement $u = \varphi(z)\,y$ pour $\varphi(z) = z^{1-\gamma}$, on aboutit à l'équation suivante pour $y(z)$:

$$z(1-z)\,y'' + [2-\gamma-(\alpha+\beta-2\gamma+3)\,z]\,y' - (\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)\,y = 0.$$

En posant $\alpha' = \alpha-\gamma+1$, $\beta' = \beta-\gamma+1$, $\gamma' = 2-\gamma$ on peut écrire cette équation sous forme canonique:

$$z(1-z)\,y'' + [\gamma' - (\alpha'+\beta'+1)\,z]\,y' - \alpha'\beta' y = 0. \tag{4a}$$

De même, le changement $u = \varphi(z)\,y$ pour $\varphi(z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}$ nous ramène à l'équation (4a) avec $\alpha' = \gamma-\alpha$, $\beta' = \gamma-\beta$, $\gamma' = \gamma$.

Soit $u(z) = f(\alpha, \beta, \gamma, z)$ une solution particulière de l'équation initiale (4). La fonction $y(z) = \frac{1}{\varphi(z)}\,u(z)$ satisfait à l'équation hypergéométrique aux paramètres $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$. L'équation (4) admet donc aussi comme solution particulière la fonction $u(z) = \varphi(z)\,f(\alpha', \beta', \gamma', z)$. On obtient donc les solutions particulières

suivantes de (4):

$$u_1(z) = f(\alpha, \beta, \gamma, z),$$
$$u_2(z) = z^{1-\gamma} f(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, z), \qquad (5)$$
$$u_3(z) = (1 - z)^{\gamma-\alpha-\beta} f(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma, z).$$

Nous avons transformé l'équation (4) en une équation du même type (4a) en prenant le cas de $\varkappa = (1 - \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)$. Le cas de $\varkappa = 0$ est dénué d'intérêt, car il se réduit à l'application successive des deux transformations considérées plus haut.

L'équation (4) reste inchangée quand on change simultanément $\alpha$ en $\beta$ et $\beta$ en $\alpha$. On doit donc ajouter aux solutions précédentes celles qui se déduisent de (5) en faisant le changement signalé.

D'une façon analogue, pour l'équation hypergéométrique dégénérée

$$zu'' + (\gamma - z)u' - \alpha u = 0 \qquad (6)$$

on obtient, à partir de la solution particulière $u_1(z) = f(\alpha, \gamma, z)$, les solutions particulières

$$u_2(z) = z^{1-\gamma} f(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z), \qquad (7)$$
$$u_3(z) = e^z f(\gamma - \alpha, \gamma, -z).$$

Pour l'équation d'Hermite

$$u'' - 2zu' + 2\nu u = 0 \qquad (8)$$

on construit, d'après la solution particulière $u_1(z) = f_\nu(z)$, une nouvelle solution particulière:

$$u_2(z) = e^{-z^2} f_{-\nu-1}(iz).$$

Puisque l'équation (8) ne varie pas quand on change $z$ en $-z$, on obtient deux autres solutions particulières:

$$u_3(z) = f_\nu(-z), \qquad u_4(z) = e^{-z^2} f_{-\nu-1}(-iz).$$

Passons à la recherche des solutions particulières concrètes des équations (4), (6), (8). On a vu au § 3 qu'une équation du type hypergéométrique

$$\sigma(z) u'' + \tau(z) u' + \lambda u = 0$$

admet des solutions particulières de la forme

$$u(z) = \frac{C_\nu}{\rho(z)} \int_C \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}} ds. \qquad (9)$$

Ici $\rho(z)$ est solution de l'équation différentielle $(\sigma\rho)' = \tau\rho$, $\nu$ est racine de l'équation $\lambda + \nu\tau' + \frac{1}{2}\nu(\nu - 1)\sigma'' = 0$, et le contour $C$

est choisi de façon à vérifier l'égalité

$$\left.\frac{\sigma^{\nu+1}(s)\,\rho(s)}{(s-z)^{\nu+2}}\right|_{s_1,\,s_2}=0 \qquad (10)$$

($s_1$, $s_2$ sont les extrémités du contour).

Afin de simplifier les raisonnements qui seront développés, nous chercherons les solutions particulières des équations (4), (6) et (8) sous la condition supplémentaire $z > 0$. Pour l'équation (4), nous supposerons de surcroît que $z < 1$.

Il vient pour l'équation (4)

$$\sigma(z)=z(1-z),\quad \rho(z)=z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma},\ \nu=-\alpha\ (\text{ou}\ \nu=-\beta);$$

pour l'équation (6)

$$\sigma(z)=z,\quad \rho(z)=z^{\gamma-1}e^{-z},\quad \nu=-\alpha;$$

pour l'équation (8)

$$\sigma(z)=1,\quad \rho(z)=e^{-z^2}.$$

La condition (10) s'écrit dans le cas de l'équation (4):

$$s^{\gamma-\alpha}(1-s)^{\beta-\gamma+1}(s-z)^{\alpha-2}\big|_{s_1,\,s_2}=0.$$

On peut satisfaire à cette condition en choisissant comme extrémités du contour $C$, pour certaines contraintes aux paramètres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, les points $s=0$, $s=1$, $s=z$ ou $s=\infty$. Pour avoir des solutions particulières exemptes de singularités dans le voisinage des points $z=0,\ 1,\ \infty$, il est bon de choisir comme $C$ des lignes droites joignant les points $s=0,\ 1,\ \infty$ au point $s=z$. Ces contours admettent une représentation paramétrique bien commode:

$$s=zt,\quad s=1-(1-z)\,t,\quad s=z/t\quad (0\leqslant t\leqslant 1).$$

Un raisonnement analogue nous donne les formes suivantes des contours pour les solutions des équations (6) et (8):

a) pour l'équation hypergéométrique dégénérée (6)

$$s=zt \qquad (0\leqslant t\leqslant 1),$$
$$s=z(1+t) \qquad (0\leqslant t<\infty);$$

b) pour l'équation d'Hermite (8)

$$s=z+t\quad (0\leqslant t<\infty).$$

Utilisant le contour $s = zt$ pour (4) et (6), on obtient d'après la formule (9) les solutions particulières suivantes:

$$u_1(z) = F(\alpha, \beta, \gamma, z) =$$

$$= C(\alpha, \beta, \gamma)(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} \int_0^1 t^{\gamma-\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}(1-zt)^{\beta-\gamma}\,dt, \qquad (11)$$

$$u_1(z) = F(\alpha, \gamma, z) = C(\alpha, \gamma)\, e^z \int_0^1 t^{\gamma-\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1} e^{-zt}\,dt. \qquad (12)$$

Les fonctions $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ et $F(\alpha, \gamma, z)$ s'appellent respectivement la *fonction hypergéométrique* et la *fonction hypergéométrique dégénérée.* Pour le choix des constantes de normalisation $C(\alpha, \beta, \gamma)$ et $C(\alpha, \gamma)$, il est bon de poser

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 0) = F(\alpha, \gamma, 0) = 1,$$

d'où

$$C(\alpha, \beta, \gamma) = C(\alpha, \gamma) = \frac{1}{B(\alpha, \gamma-\alpha)} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}. \qquad (13)$$

Ici $\Gamma(z)$ est la fonction gamma et $B(u, v)$ la fonction bêta (voir Appendice A).

Pour les fonctions $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ et $F(\alpha, \gamma, z)$ la condition (10) ne peut être satisfaite que sous certaines restrictions sur les paramètres. Il sera montré dans le n° suivant que les représentations intégrales (11) et (12) permettent d'obtenir le prolongement analytique des fonctions $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ et $F(\alpha, \gamma, z)$ en $z$ et en chacun des paramètres sur le domaine où $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0$. Les prolongements analytiques ainsi obtenus vérifient comme précédemment les équations (4) et (6) respectivement. Dans ce cas, afin d'assurer l'univalence de la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ dans (11), il convient d'imposer la condition $|\arg(1 - zt)| < \pi$ et de faire une coupure dans le plan de la variable complexe $z$ le long de l'axe réel pour $z \geqslant 1$.

Cherchons d'autres solutions particulières de (4) en posant dans (5) $f(\alpha, \beta, \gamma, z) = F(\alpha, \beta, \gamma, z)$:

$$u_2(z) = z^{1-\gamma}F(\alpha - \gamma + 1,\ \beta - \gamma + 1,\ 2 - \gamma,\ z),$$
$$u_3(z) = (1 - z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma - \alpha,\ \gamma - \beta,\ \gamma,\ z).$$

D'autres solutions encore se déduisent de celles-ci par le changement de $\alpha$ en $\beta$ et de $\beta$ en $\alpha$. En particulier, l'équation hypergéométrique admet comme solution la fonction

$$u_4(z) = F(\beta, \alpha, \gamma, z).$$

Les représentations intégrales définissant ces quatre solutions existent simultanément sous les conditions restrictives suivantes imposées

aux paramètres: $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$, $0 < \operatorname{Re}(\gamma - \alpha) < 1$. Puisque l'équation hypergéométrique n'admet que deux solutions linéairement indépendantes, les fonctions $u_i(z)$ doivent être liées entre elles par des relations linéaires. Pour $\gamma \neq 1$ les fonctions $u_1(z)$ et $u_2(z)$ seront linéairement indépendantes, en raison de leur comportement différent pour $z \to 0$. Donc, lorsque $\gamma \neq 1$, chacune des fonctions $u_3(z)$, $u_4(z)$ se laisse représenter par une combinaison linéaire de $u_1(z)$ et $u_2(z)$. Confrontant le comportement de ces fonctions pour $z \to 0$, on constate que

$$u_3(z) = u_1(z), \quad u_4(z) = u_1(z) \quad (\operatorname{Re} \gamma > 1).$$

i.e. pour $\operatorname{Re} \gamma > 1$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1 - z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma, z), \tag{14}$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = F(\beta, \alpha, \gamma, z). \tag{15}$$

Le principe du prolongement analytique permet de supprimer les restrictions sur $\gamma$. Les valeurs de la fonction $(1 - z)^{\gamma-\alpha-\beta}$ dans (14) sont prises sur la branche de cette fonction qui est égale à 1 pour $z = 0$, i.e. $|\arg(1 - z)| < \pi$.

Dans le cas de l'équation hypergéométrique dégénérée, un raisonnement analogue conduit aux solutions linéairement indépendantes

$$\begin{aligned} u_1(z) &= F(\alpha, \gamma, z), \\ u_2(z) &= z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z) \end{aligned} \tag{16}$$

et à la relation fonctionnelle

$$F(\alpha, \gamma, z) = e^z F(\gamma - \alpha, \gamma, -z). \tag{17}$$

A l'aide des relations (14) et (17), on obtient à partir de (11)-(13) des représentations intégrales plus simples:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{-\beta}\, dt, \tag{18}$$

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1} e^{zt}\, dt. \tag{19}$$

En prenant les autres contours on obtient pour l'équation hypergéométrique les paires suivantes de solutions linéairement indépendantes:

contour $s = 1 - (1 - z)t \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$:

$$\begin{aligned} u_1(z) &= F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - z); \\ u_2(z) &= (1 - z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1-z); \end{aligned} \tag{20}$$

contour $s = z/t \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$:

$$\begin{aligned} u_1(z) &= z^{-\alpha} F(\alpha,\ \alpha - \gamma + 1,\ \alpha - \beta + 1,\ 1/z); \\ u_2(z) &= z^{-\beta} F(\beta,\ \beta - \gamma + 1,\ \beta - \alpha + 1,\ 1/z). \end{aligned} \tag{21}$$

Dans le cas de l'équation hypergéométrique dégénérée, le contour $s = z(1 + t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \infty)$ amène la solution

$$u_1(z) = G(\alpha,\ \gamma,\ z) = C(\alpha,\ \gamma) \int_0^\infty e^{-zt} t^{\alpha-1} (1+t)^{\gamma-\alpha-1}\, dt.$$

La fonction $G(\alpha, \gamma, z)$ s'appelle *fonction hypergéométrique dégénérée de deuxième espèce*. L'intégrale définissant la fonction $G(\alpha, \gamma, z)$ est une intégrale de Laplace, ce qui veut dire qu'on a en vertu du lemme de Watson (voir Appendice B)

$$\lim_{z \to \infty} z^\alpha G(\alpha,\ \gamma,\ z) = C(\alpha,\ \gamma)\, \Gamma(\alpha).$$

Il est commode de choisir $C(\alpha, \gamma) = 1/\Gamma(\alpha)$, pour que la limite indiquée soit égale à l'unité. D'où

$$G(\alpha,\ \gamma,\ z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{\alpha-1} (1+t)^{\gamma-\alpha-1}\, dt, \tag{22}$$

$$\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad |\arg z| \leqslant \pi.$$

D'après la solution $u_1(z) = G(\alpha, \gamma, z)$, en posant dans (7) $f(\alpha, \gamma, z) = G(\alpha, \gamma, z)$, on construit la seconde solution linéairement indépendante

$$u_2(z) = e^z G(\gamma - \alpha,\ \gamma,\ -z)$$

et on établit la relation fonctionnelle

$$G(\alpha,\ \gamma,\ z) = z^{1-\gamma} G(\alpha - \gamma + 1,\ 2 - \gamma,\ z). \tag{23}$$

Les solutions de l'équation (8) s'obtiennent d'une façon analogue. Il vient

$$\begin{aligned} u_1(z) &= H_\nu(z) = C_\nu \int_0^\infty e^{-t^2 - 2zt} t^{-\nu-1}\, dt, \\ u_2(z) &= e^{-z^2} H_{-\nu-1}(iz), \\ u_3(z) &= H_\nu(-z), \\ u_4(z) &= e^{-z^2} H_{-\nu-1}(-iz). \end{aligned} \tag{24}$$

La fonction $H_\nu(z)$ pour $C_\nu = 1/\Gamma(-\nu)$ porte le nom de *fonction d'Hermite* *).

*) Le coefficient de normalisation $C_\nu$ est choisi de telle façon que le prolongement analytique en $\nu$ de $H_\nu(z)$ se confonde avec le polynôme d'Hermite $H_n(z)$ pour $\nu = n$ (voir § 21).

Citons quelques propriétés élémentaires des fonctions du type hypergéométrique qui résultent directement des représentations intégrales (18), (19), (22) et (24). On a vu au § 2 que les dérivées d'ordre quelconque des fonctions du type hypergéométrique sont aussi des fonctions du type hypergéométrique. Cette propriété générale peut être concrétisée à l'aide des représentations intégrales établies pour les fonctions $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, $F(\alpha, \gamma, z)$, $G(\alpha, \gamma, z)$ et $H_\nu(z)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} F(\alpha, \beta, \gamma, z) &= \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, z), \\ \frac{d}{dz} F(\alpha, \gamma, z) &= \frac{\alpha}{\gamma} F(\alpha+1, \gamma+1, z), \\ \frac{d}{dz} G(\alpha, \gamma, z) &= -\alpha G(\alpha+1, \gamma+1, z), \\ \frac{d}{dz} H_\nu(z) &= 2\nu H_{\nu-1}(z). \end{aligned} \tag{25}$$

En portant les *formules de dérivation* (25) dans les équations (4), (6) et (8), on obtient les *relations de récurrence*:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha, \beta, \gamma, z) = (\alpha+1)(\beta+1) z(1-z)\,\varphi(\alpha+2, \beta+2, \gamma+2, z) + \\ + [\gamma - (\alpha+\beta+1) z]\,\varphi(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, z); \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha, \gamma, z) = (\alpha+1) z\varphi(\alpha+2, \gamma+2, z) + \\ + (\gamma - z)\,\varphi(\alpha+1, \gamma+1, z); \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} G(\alpha, \gamma, z) = (\alpha+1) zG(\alpha+2, \gamma+2, z) - \\ - (\gamma - z)\, G(\alpha+1, \gamma+1, z); \end{aligned} \tag{28}$$

$$H_\nu(z) = 2zH_{\nu-1}(z) - (2\nu-2) H_{\nu-2}(z). \tag{29}$$

Ici

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma, z),$$

$$\varphi(\alpha, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \gamma, z).$$

En changeant dans (26) les paramètres $\alpha$ et $\beta$ en $\gamma-\alpha$ et $\gamma-\beta$ et en faisant intervenir la relation fonctionnelle (14), on obtient également une relation de récurrence de la forme

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha, \beta, \gamma, z) = (\gamma-\alpha+1)(\gamma-\beta+1) \frac{z}{1-z}\,\varphi(\alpha, \beta, \gamma+2, z) + \\ + [\gamma - (2\gamma-\alpha-\beta+1) z] \frac{1}{1-z}\,\varphi(\alpha, \beta, \gamma+1, z). \end{aligned} \tag{30}$$

La relation de récurrence pour la fonction hypergéométrique dégénérée s'établit d'une façon analogue. On obtient

$$\varphi(\alpha, \gamma, z) = -(\gamma - \alpha + 1) z\varphi(\alpha, \gamma + 2, z) + \\ + (\gamma + z)\varphi(\alpha, \gamma + 1, z). \quad (31)$$

Les relations de récurrence (26) à (31) facilitent beaucoup le prolongement analytique des fonctions du type hypergéométrique. Un procédé général d'établissement des différentes relations de récurrence sera proposé dans le paragraphe suivant.

**3. Prolongement analytique.** Considérons la question du prolongement analytique des fonctions $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, $F(\alpha, \gamma, z)$, $G(\alpha, \gamma, z)$ et $H_\nu(z)$. Voyons tout d'abord quel est le domaine maximal des valeurs de l'argument $z$ et des paramètres auquel on peut prolonger analytiquement ces fonctions à l'aide de leurs représentations intégrales en vertu du théorème sur l'analyticité d'une intégrale dépendant d'un paramètre (voir théorème 2 du § 3).

Montrons que la fonction hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ définie par la représentation intégrale

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{-\beta}\,dt \quad (32)$$

est fonction analytique de chacune des variables $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $z$ pour $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0$, $|\arg(1-z)| < \pi$. Pour connaître le domaine d'analyticité, on doit définir le domaine dans lequel l'intégrale (32) converge uniformément par rapport à la variable $z$ et aux paramètres correspondants. On a

$$t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{-\beta} = t^{\delta-1}(1-t)^{\delta-1}\psi(t),$$

où

$$\psi(t) = t^{\alpha-\delta}(1-t)^{\gamma-\alpha-\delta}(1-zt)^{-\beta}.$$

Pour tout $\delta > 0$ la fonction $\psi(t)$ est continue pour la totalité des variables dans un domaine fermé $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\delta \leqslant \operatorname{Re}\alpha \leqslant N$, $\delta \leqslant \operatorname{Re}(\gamma-\alpha) \leqslant N$, $|\beta| \leqslant N$, $|z| \leqslant N$, $|\arg(1-\delta-z)| \leqslant \leqslant \pi - \delta$; elle est donc bornée dans ce domaine:

$$|t^{\alpha-\delta}(1-t)^{\gamma-\alpha-\delta}(1-zt)^{-\beta}| \leqslant C$$

($C$ est une constante). On a donc dans le domaine considéré

$$|t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{-\beta}| \leqslant Ct^{\delta-1}(1-t)^{\delta-1}.$$

Puisque l'intégrale $\int_0^1 t^{\delta-1}(1-t)^{\delta-1}\,dt$ est convergente, l'intégrale (32) définissant la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ est uniformément con-

vergente dans ce domaine et représente à ce titre une fonction analytique de chacune des variables.

Comme les constantes $\delta$ et $N$ sont arbitraires, la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ est une fonction analytique de chacune des variables dans le domaine $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0$, $|\arg(1-z)| < \pi$. Cette dernière condition signifie qu'on a fait dans le plan de la variable complexe $z$ une coupure le long de l'axe réel pour $z \geqslant 1$.

On montre de même que $F(\alpha, \gamma, z)$ est une fonction analytique de chacune des variables pour $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0$, quelle que soit la valeur de $z$.

L'intégrale définissant la fonction $G(\alpha, \gamma, z)$ est une intégrale de Laplace, qui a été étudiée dans l'exemple suivant le théorème 1 de l'Appendice B. Conformément aux résultats obtenus dans cet exemple, $G(\alpha, \gamma, z)$ est une fonction analytique de chacune des variables pour $|\arg z| < \frac{3\pi}{2}$, $z \neq 0$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$. Quand $z \to \infty$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$ et $|\arg z| \leqslant \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, cette fonction admet la représentation asymptotique suivante:

$$G(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\alpha) z^{\alpha}} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{k!\,\Gamma(\gamma-\alpha-k)} \frac{1}{z^k} + O\left(\frac{1}{z^n}\right)\right]. \quad (33)$$

Pour que la fonction $G(\alpha, \gamma, z)$ soit univoque, il suffit de faire une coupure le long de l'axe réel pour $z < 0$ et de poser $-\pi < \arg z \leqslant \pi$. La représentation asymptotique (33) reste valable dans ce domaine.

Pour connaître le domaine d'analyticité de la fonction

$$H_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_0^\infty e^{-t^2-2zt} t^{-\nu-1}\, dt,$$

on doit définir le domaine dans lequel l'intégrale converge uniformément en $z$ et en $\nu$. La convergence uniforme a lieu dans le domaine $\operatorname{Re} z \geqslant -N$, $\delta - 1 \leqslant -\operatorname{Re}\nu - 1 \leqslant N$ $(N > 0,\ \delta > 0)$ en vertu de l'évaluation

$$|e^{-t^2-2zt} t^{-\nu-1}| < e^{-t^2+2Nt}(t^{\delta-1} + t^N)$$

et de la convergence de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-t^2+2Nt}(t^{\delta-1} + t^N)\, dt.$$

Comme les constantes $N$ et $\delta$ sont arbitraires, la fonction $H_\nu(z)$ est une fonction analytique de chacune des variables pour $\operatorname{Re}\nu < 0$.

Nous avons obtenu le prolongement analytique des fonctions $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, $F(\alpha, \gamma, z)$, $G(\alpha, \gamma, z)$ et $H_\nu(z)$ pour certaines restrictions imposées aux paramètres. Les relations de récurrence (26) à (31) permettent de supprimer ces restrictions. Remarquant que pour les fonctions $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)$ et $\varphi(\alpha, \gamma, z)$ qui figurent dans (26) et (27) la différence $\gamma - \alpha$ est conservée, on peut, en diminuant successivement les valeurs de $\alpha$ d'une unité dans (26) et (27), obtenir le prolongement analytique des fonctions

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma, z),$$

$$\varphi(\alpha, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \gamma, z)$$

à des $\alpha$ quelconques, sous la condition supplémentaire $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha) > 0$. Le prolongement analytique des fonctions $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)$ et $\varphi(\alpha, \gamma, z)$ dans le cas de $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha) \leqslant 0$ s'obtient en diminuant successivement d'une unité les valeurs de $\gamma$ dans (30) et (31). D'une façon analogue, on obtient le prolongement analytique des fonctions $G(\alpha, \gamma, z)$ et $H_\nu(z)$ à l'aide de (28) et (29).

En vertu de la formule de dérivation

$$\frac{d}{dz} \varphi(\alpha, \beta, \gamma, z) = \alpha\beta\varphi(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, z)$$

qui découle de (25), le domaine d'analyticité des dérivées de $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)$ par rapport à la variable $z$ et aux paramètres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ est le même que pour la fonction $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)$ elle-même. Dans ce même domaine la fonction $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)$ vérifie l'équation hypergéométrique (4), en vertu du principe du prolongement analytique. Des considérations analogues s'appliquent aux fonctions $\varphi(\alpha, \gamma, z)$, $G(\alpha, \gamma, z)$ et $H_\nu(z)$.

## § 20. Propriétés principales des fonctions du type hypergéométrique

Les représentations intégrales établies plus haut pour les fonctions du type hypergéométrique permettent de dégager les propriétés principales de ces fonctions : relations de récurrence, développements en séries de puissances, relations fonctionnelles, représentations asymptotiques. En étudiant les différentes propriétés des fonctions du type hypergéométrique, nous utiliserons largement les résultats obtenus dans le Chapitre premier.

**1. Relations de récurrence.** Grâce à la méthode proposée au § 4, on montre que trois fonctions hypergéométriques arbitraires $F(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, z)$ ($i = 1, 2, 3$), au cas où les différences $\alpha_i - \alpha_k$, $\beta_i - \beta_k$, $\gamma_i - \gamma_k$ sont des nombres entiers, vérifient ensemble une

relation linéaire de la forme

$$\sum_{i=1}^{3} C_i(z)\, F(\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i,\ z)=0,$$

dans laquelle les coefficients $C_i(z)$ sont des polynômes. Pour démontrer cette proposition, considérons l'expression

$$\sum_i C_i(z)\, F(\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i,\ z).$$

Montrons qu'il est possible de choisir les coefficients $C_i = C_i(z)$ de façon à annuler la combinaison considérée. Pour toute valeur fixe de $z$, en vertu de la représentation intégrale (18) du § 19, on a

$$\sum_i C_i F(\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i,\ z)=\int_0^1 t^{\alpha_0-1}(1-t)^{\gamma_0-\alpha_0-1}(1-zt)^{-\beta_0}P(t)\,dt.$$

Ici $\alpha_0$, $\gamma_0-\alpha_0$, $-\beta_0$ sont celles des valeurs de $\alpha_i$, $\gamma_i-\alpha_i$, $-\beta_i$ qui possèdent la partie réelle la plus petite ; $P(t)$ est un polynôme. Les coefficients $C_i = C_i(z)$ sont choisis de façon à vérifier l'égalité

$$t^{\alpha_0-1}(1-t)^{\gamma_0-\alpha_0-1}(1-zt)^{-\beta_0}P(t)=$$
$$=\frac{d}{dt}\left[t^{\alpha_0}(1-t)^{\gamma_0-\alpha_0}(1-zt)^{1-\beta_0}Q(t)\right], \qquad (1)$$

où $Q(t)$ est un polynôme. On obtient alors

$$\sum_i C_i F(\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i,\ z)=t^{\alpha_0}(1-t)^{\gamma_0-\alpha_0}(1-zt)^{1-\beta_0}Q(t)\Big|_0^1.$$

Puisque $\operatorname{Re}(\gamma_0-\alpha_0)=\min \operatorname{Re}(\gamma_i-\alpha_i)>0$ et $\operatorname{Re}\alpha_0 = \min \operatorname{Re}\alpha_i>0$, le second membre s'annule, si bien qu'on a avec des coefficients $C_i = C_i(z)$ ainsi choisis une relation linéaire

$$\sum_i C_i F(\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i,\ z)=0.$$

En reprenant le raisonnement développé au § 4, on s'assure facilement que les coefficients $C_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$ sont des polynômes (à un facteur commun près). Les relations de récurrence pour les fonctions hypergéométriques dégénérées $F(\alpha, \gamma, z)$ s'établissent d'une façon analogue, à l'aide de la représentation (19) du § 19:

$$\sum_i C_i F(\alpha_i,\ \gamma_i,\ z)=\int_0^1 t^{\alpha_0-1}(1-t)^{\gamma_0-\alpha_0-1}e^{zt}P(t)\,dt,$$

où $P(t)$ est un polynôme. Les coefficients $C_i = C_i(z)$ sont choisis de façon à vérifier l'égalité

$$t^{\alpha_0-1}(1-t)^{\gamma_0-\alpha_0-1}e^{zt}P(t)=\frac{d}{dt}\left[t^{\alpha_0}(1-t)^{\gamma_0-\alpha_0}e^{zt}Q(t)\right], \qquad (2)$$

où $Q(t)$ est un polynôme. On obtient alors la relation cherchée, car

$$\sum_i C_i F(\alpha_i, \gamma_i, z) = t^{\alpha_0}(1-t)^{\gamma_0-\alpha_0} e^{zt} Q(t)\Big|_0^1 = 0$$

pour $\operatorname{Re} \gamma_i > \operatorname{Re} \alpha_i > 0$.

Changeant $t$ en $-t$ dans la représentation intégrale (22) du § 19, on déduit pour la fonction $G(\alpha, \gamma, z)$ une représentation analogue à la représentation intégrale (19) de $F(\alpha, \gamma, z)$ du § 19:

$$G(\alpha, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{0} (-t)^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1} e^{zt}\, dt.$$

La représentation obtenue ne diffère de la représentation intégrale de $F(\alpha, \gamma, z)$ que par un facteur et les bornes d'intégration. Par le même raisonnement que ci-dessus, on s'assure sans peine que les fonctions

$$G(\alpha, \gamma, z) \quad \text{et} \quad e^{i\pi\alpha} \frac{\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \gamma, z)$$

vérifient les mêmes relations de récurrence.

Déduisons, à titre d'exemple, la relation de récurrence liant $F(\alpha, \gamma, z)$ et $F(\alpha \pm 1, \gamma, z)$. On a alors

$$\alpha_1 = \alpha - 1, \quad \alpha_2 = \alpha, \quad \alpha_3 = \alpha + 1, \quad \alpha_0 = \alpha - 1,$$
$$\gamma_0 - \alpha_0 = \gamma - \alpha - 1.$$

A un facteur indépendant de $t$ près, le polynôme $P(t)$ s'écrit

$$P(t) = C_1 \alpha(\alpha - 1)(1-t)^2 + C_2 \alpha(\gamma - \alpha) t (1-t) + \\ + C_3 (\gamma - \alpha)(\gamma - \alpha - 1) t^2. \qquad (3)$$

Le degré du polynôme $Q(t)$ étant égal à zéro, on peut donc poser $Q(t) = 1$. L'égalité (2) devient alors

$$e^{zt} t^{\alpha-2}(1-t)^{\gamma-\alpha-2} P(t) = \frac{d}{dt}[e^{zt} t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}].$$

D'où

$$P(t) = zt(1-t) + (\alpha - 1)(1-t) - (\gamma - \alpha - 1)t.$$

Portant cette égalité dans (3) et identifiant les coefficients de mêmes puissances de $t$ dans les deux membres de l'égalité, on obtient

$$C_1 = \frac{1}{\alpha}, \quad C_2 = \frac{2\alpha - \gamma + z}{\alpha(\gamma - \alpha)}, \quad C_3 = -\frac{1}{\gamma - \alpha}.$$

Il vient définitivement

$$(\gamma - \alpha) F(\alpha - 1, \gamma, z) + (2\alpha - \gamma + z) F(\alpha, \gamma, z) - \\ - \alpha F(\alpha + 1, \gamma, z) = 0.$$

**2. Développements en séries de puissances.** Pour obtenir les développements des fonctions $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ et $F(\alpha, \gamma, z)$ en séries de puissances de $z$, on peut faire intervenir les représentations intégrales (18) et (19) du § 19, ainsi que les développements des fonctions $(1 - zt)^{-\beta}$ et $e^{zt}$ :

$$e^{zt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zt)^n}{n!},$$

$$(1-zt)^{-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n (zt)^n}{n!}, \quad |zt| < 1, \tag{4}$$

où

$$(\beta)_0 = 1, \quad (\beta)_n = \beta(\beta+1), \; \ldots, \; (\beta+n-1) = \frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta)}.$$

Si $|z| < 1$, la série (4) converge uniformément pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, si bien qu'on peut permuter la sommation et l'intégration dans la représentation intégrale correspondante. Il vient donc pour $\mathrm{Re}\,\gamma > \mathrm{Re}\,\alpha > 0$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} z^n \int_0^1 t^{n+\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\,dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n \, n!} z^n. \tag{5}$$

On obtient de même pour $F(\alpha, \gamma, z)$, quel que soit $z$,

$$F(\alpha, \gamma, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n \, n!} z^n. \tag{6}$$

Le développement (6) de $F(\alpha, \gamma, z)$ ne diffère du développement (5) de $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ que par l'absence du facteur $(\beta)_n$ dans chaque terme de la série. On donne à (5) l'appellation de *série hypergéométrique*, et à (6), de *série hypergéométrique dégénérée.*

D'après le critère de d'Alembert (voir la remarque au théorème de Weierstrass dans le § 14), les séries (5) et (6) sont uniformément convergentes par rapport à toutes les variables dans n'importe quel domaine fermé de variation de ces dernières exempt de valeurs entières négatives et nulles de $\gamma$ ; en ce qui concerne la série (5), il doit y avoir en outre $|z| \leqslant q < 1$. En vertu du théorème de Weierstrass (voir § 14), ces séries sont donc des fonctions analytiques de chacune des variables pour $\gamma \neq -k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) et avec accessoirement $|z| < 1$ pour la série (5). Conformément au principe du pro-

longement analytique, les développements (5) et (6) restent valables dans tout le domaine indiqué de variation des variables.

Si $\alpha = -m$ ($m = 0, 1, \ldots$), la série hypergéométrique (5) est tronquée, si bien que la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ est un polynôme de degré $m$ en $z$. Ce polynôme a aussi un sens pour $\gamma = -k$ si $m \leqslant k$, car $(\gamma)_n = (-k)_n \neq 0$ quand $n \leqslant m$. Puisque $F(\alpha, \beta, \gamma, z) = F(\beta, \alpha, \gamma, z)$, il en est de même lorsque $\beta = -m$. Des considérations analogues s'appliquent également au cas de la série (6).

Pour développer en série la fonction hypergéométrique dégénérée de seconde espèce $G(\alpha, \gamma, z)$ et la fonction d'Hermite $H_\nu(z)$, on fera intervenir les relations fonctionnelles qui expriment ces dernières à l'aide des fonctions $F(\alpha, \gamma, z)$ (voir n° 3 ci-après).

Dans certains problèmes on utilise parfois les fonctions hypergéométriques généralisées ${}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q; z)$ dont les développements généralisent les séries (5) et (6):

$$
{}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n \ldots (\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n (\beta_2)_n \ldots (\beta_q)_n} \frac{z^n}{n!}.
$$

Les séries pour ces fonctions ne convergent que pour $p \leqslant q + 1$, encore qu'avec $p = q + 1$ la série ne converge que pour $|z| < 1$. On a dans les notations adoptées

$$
F(\alpha, \beta, \gamma, z) = {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z),
$$
$$
F(\alpha, \gamma, z) = {}_1F_1(\alpha; \gamma; z).
$$

**3. Relations fonctionnelles et représentations asymptotiques.** Les relations déduites plus haut

$$
F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1 - z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma, z), \quad (7)
$$
$$
F(\alpha, \beta, \gamma, z) = F(\beta, \alpha, \gamma, z) \quad (8)
$$

sont des exemples des relations fonctionnelles entre deux fonctions hypergéométriques qui dépendent d'une même variable $z$. On peut indiquer des relations fonctionnelles qui lient entre elles des fonctions hypergéométriques de valeurs différentes des variables. Dans le n° 2 on a obtenu plusieurs paires de solutions linéairement indépendantes de l'équation hypergéométrique qui se laissent exprimer à l'aide des fonctions hypergéométriques des arguments $z$, $1 - z$, $1/z$. Puisque l'équation hypergéométrique admet tout au plus deux solutions linéairement indépendantes, n'importe laquelle des solutions $u(z)$ peut être représentée sous forme de combinaison linéaire de solutions linéairement indépendantes $u_1(z)$ et $u_2(z)$ d'une paire quelconque:

$$
u(z) = C_1 u_1(z) + C_2 u_2(z). \quad (9)
$$

Signalons une propriété fort simple des coefficients $C_1$ et $C_2$: *si, dans un domaine quelconque de variation des nombres* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $z$, *les fonctions* $u(z)$, $u_1(z)$, $u_2(z)$ *et leurs dérivées par rapport à* $z$ *sont des fonctions analytiques de chacune des variables, les coefficients* $C_1 = C_1(\alpha, \beta, \gamma)$ *et* $C_2 = C_2(\alpha, \beta, \gamma)$ *seront eux aussi des fonctions analytiques de chacune des variables dans le même domaine.*

Cette propriété est immédiate. En effet, il suffit d'écrire les coefficients $C_1$ et $C_2$ sous forme explicite :

$$C_1 = \frac{W(u, u_2)}{W(u_1, u_2)}, \qquad C_2 = \frac{W(u_1, u)}{W(u_1, u_2)}. \tag{10}$$

Ici

$$W(f, g) = f(z)\, g'(z) - f'(z)\, g(z)$$

est le wronskien qui, pour des fonctions linéairement indépendantes, est distinct de zéro. Pour connaître les coefficients $C_1$ et $C_2$, il suffit donc de les exprimer sous des conditions supplémentaires imposées aux paramètres et d'appliquer ensuite le principe du prolongement analytique.

Soit $u(z) = F(\alpha, \beta, \gamma, z)$. Pour déterminer les coefficients $C_1$ et $C_2$ dans le développement (9), nous utiliserons les relations fonctionnelles (7), (8) et les valeurs prises par $u(z)$ dans les points singuliers $z = 0, 1, \infty$. De la représentation intégrale (18) du § 19, on tire pour $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0$, $\operatorname{Re}\beta < 0$

$$\lim_{z\to 1} F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-\beta-1}\, dt = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)},$$

$$\lim_{z\to\infty} \frac{F(\alpha, \beta, \gamma, z)}{(-z)^{-\beta}} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-\beta-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\, dt = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}.$$

Ici $|\arg(-z)| < \pi$. En outre

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 0) = 1.$$

Développons $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ suivant les fonctions hypergéométriques des variables $1 - z$ et $1/z$:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = C_1(\alpha, \beta, \gamma)\, F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-z) + C_2(\alpha, \beta, \gamma)(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} \times F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-z), \tag{11}$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \\ = D_1(\alpha, \beta, \gamma)(-z)^{-\alpha} F(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, 1/z) + \\ + D_2(\alpha, \beta, \gamma)(-z)^{-\beta} F(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1, 1/z). \tag{12}$$

Passant à la limite dans (11) pour $z \to 1$ et dans (12) pour $z \to \infty$, on obtient pour $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0$ et $\operatorname{Re}\beta < 0$

$$C_1(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}, \quad D_2(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}.$$

Pour déterminer les coefficients $C_2(\alpha, \beta, \gamma)$ et $D_1(\alpha, \beta, \gamma)$, il suffit d'utiliser dans (11) la relation fonctionnelle (7) et dans (12) la relation (8). Il vient

$$C_2(\alpha, \beta, \gamma) = C_1(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)},$$

$$D_1(\alpha, \beta, \gamma) = D_2(\beta, \alpha, \gamma) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}.$$

Ainsi donc,

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-z) + \\ + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} \times \\ \times F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-z), \tag{13}$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}(-z)^{-\alpha} \times \\ \times F\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, \frac{1}{z}\right) + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}(-z)^{-\beta} \times \\ \times F\left(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1, \frac{1}{z}\right) \quad (|\arg(-z)| < \pi). \tag{14}$$

En vertu du principe du prolongement analytique, les relations (13) et (14) restent valables pour toutes valeurs de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

A partir des développements (13) et (14), on détermine sans difficulté le comportement de $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ pour $z \to 1$ et $z \to \infty$ en utilisant les développements en série des fonctions hypergéométriques des variables $1 - z$ et $1/z$. Les différentes combinaisons de (13), (14) et (7) permettent de déduire bien évidemment beaucoup d'autres relations fonctionnelles, qui à leur tour permettent d'exprimer la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ à l'aide des fonctions hypergéométriques des variables $1/(1-z)$, $1 - 1/z$, $1/(1 - 1/z) = \frac{1}{z-1}$ (Voir Rappel des formules principales).

Les relations fonctionnelles pour les fonctions hypergéométriques dégénérées s'obtiennent d'une façon analogue. On a

$$G(\alpha, \gamma, z) = C_1(\alpha, \gamma) F(\alpha, \gamma, z) + \\ + C_2(\alpha, \gamma) z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z). \quad (15)$$

Cherchons le coefficient $C_2(\alpha, \gamma)$. A cet effet, supposons provisoirement que $\operatorname{Re}\gamma - 1 > \operatorname{Re}\alpha > 0$, $z > 0$, et passons dans l'égalité (15) et dans l'égalité (22) du § 19 à la limite pour $z \to 0$. Il vient alors

$$C_2(\alpha, \gamma) = \lim_{z\to 0} z^{\gamma-1} G(\alpha, \gamma, z) =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{z^{\gamma-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{\alpha-1} (1+t)^{\gamma-\alpha-1}\, dt =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-s} s^{\alpha-1} (z+s)^{\gamma-\alpha-1}\, ds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-s} s^{\gamma-2}\, ds = \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Pour déterminer le coefficient $C_1(\alpha, \gamma)$, il suffit de faire intervenir la relation (23) du § 19:

$$G(\alpha, \gamma, z) = z^{1-\gamma} G(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z).$$

Il vient alors

$$C_1(\alpha, \gamma) = C_2(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma) = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma-1)}.$$

On a donc

$$G(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)} F(\alpha, \gamma, z) + \\ + \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z). \quad (16)$$

Cette relation permet de développer $G(\alpha, \gamma, z)$ en série suivant les puissances de $z$ (cf. la formule (6)). A l'aide de l'égalité (16) et de l'égalité (17) du § 19, on obtient la représentation de $F(\alpha, \gamma, z)$ sous forme de combinaison linéaire de $G(\alpha, \gamma, z)$ et de $e^z G(\gamma-\alpha, \gamma, -z)$.

Il vient

$$e^z G(\gamma-\alpha, \gamma, -z) = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)} e^z F(\gamma-\alpha, \gamma, -z) + \\ + \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} (-z)^{1-\gamma} e^z F(1-\alpha, 2-\gamma, -z) = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)} F(\alpha, \gamma, z) + \\ + \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} (-z)^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z). \quad (16a)$$

Ici $0 < \arg(-z) \leqslant \pi$, d'où il découle que

$$(-z)^{1-\gamma} = z^{1-\gamma} e^{\mp i\pi(1-\gamma)} = -z^{1-\gamma} e^{\pm i\pi\gamma},$$

à condition que $-\pi < \arg z \leqslant \pi$ (le signe positif correspond au cas de $0 < \arg z \leqslant \pi$). Eliminant entre (16) et (16a) la fonction $z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z)$ et appliquant la formule de complément de la fonction gamma, on aboutit à la relation fonctionnelle:

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} e^{\pm i\pi\alpha} G(\alpha, \gamma, z) + \\ + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^{\pm i\pi(\alpha-\gamma)} e^{z} G(\gamma-\alpha, \gamma, -z) \qquad (17)$$

(le signe positif correspondant à $0 < \arg z \leqslant \pi$, et le signe négatif à $-\pi < \arg z \leqslant 0$). La relation (17) permet d'établir la représentation asymptotique de la fonction $F(\alpha, \gamma, z)$ pour $z \to \infty$ (cf. la formule (33) du § 19):

$$F(\alpha, \gamma, z) = \Gamma(\gamma)(-z)^{-\alpha} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\alpha)_k}{k!\,\Gamma(\gamma-\alpha-k)} \frac{1}{z^k} + O\left(\frac{1}{z^n}\right) \right] + \\ + \Gamma(\gamma) e^{z} z^{\alpha-\gamma} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\gamma-\alpha)_k}{k!\,\Gamma(\gamma-k)} \frac{1}{z^k} + O\left(\frac{1}{z^n}\right) \right]. \qquad (18)$$

En calculant $(-z)^{-\alpha}$ et $z^{\alpha-\gamma}$, on doit poser dans (18) $-\pi < \arg(-z) \leqslant \pi$ et $-\pi < \arg z \leqslant \pi$ respectivement.

Cherchons à présent les relations qui existent entre les différentes solutions de l'équation d'Hermite: $H_\nu(\pm z)$ et $e^{-z^2} H_{-\nu-1}(\pm iz)$. A cet effet, appliquons les formules (9) et (10). Les wronskiens figurant dans (10) se calculent sans difficulté pour $z = 0$ à l'aide des valeurs de $H_\nu(0)$ et de $H'_\nu(0)$. Ces dernières se calculent facilement à leur tour pour $\operatorname{Re} \nu < 0$ à l'aide de (24) du § 19 et de la formule de duplication de la fonction gamma:

$$H_\nu(0) = \frac{2^\nu \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}, \quad H'_\nu(0) = -\frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}. \qquad (19)$$

En vertu du principe du prolongement analytique, ces formules restent vraies pour $\nu$ quelconque. On aboutit finalement aux relations fonctionnelles suivantes pour la fonction d'Hermite:

$$H_\nu(z) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}} e^{z^2} \left[ e^{i\frac{\pi\nu}{2}} H_{-\nu-1}(iz) + e^{-i\frac{\pi\nu}{2}} H_{-\nu-1}(-iz) \right],$$

$$H_\nu(z) = e^{i\pi\nu} H_\nu(-z) + \frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{z^2 + i\frac{\pi(\nu+1)}{2}} H_{-\nu-1}(-iz),$$

$$H_\nu(z) = e^{-i\pi\nu} H_\nu(-z) + \frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{z^2 - i\frac{\pi(\nu+1)}{2}} H_{-\nu-1}(iz).$$

14—0592

On obtient une autre classe de relations fonctionnelles en mettant à profit la symétrie de l'équation différentielle par rapport au changement de $z$ en $-z$. Supposons que l'équation du type hypergéométrique

$$\sigma(z)\,u'' + \tau(z)\,u' + \lambda u = 0 \tag{20}$$

reste inchangée quand on passe de $z$ à $-z$, i.e.

$$\sigma(-z) = \sigma(z), \qquad \tau(-z) = -\tau(z).$$

Dans ce cas

$$\sigma(z) = \sigma_1(z^2), \qquad \tau(z) = \mu z.$$

Ici $\sigma_1(z)$ est un polynôme de degré non supérieur à 1 en $s$, et $\mu$ est une constante. A la suite du changement $s = z^2$, $u(z) = v(s)$, l'équation (20) devient

$$4s\sigma_1(s)\,v'' + 2\,[\sigma_1(s) + \mu s]\,v' + \lambda v = 0. \tag{21}$$

L'équation (21) est toujours une équation du type hypergéométrique. Aussi toute solution $u(z)$ de (20) se laisse-t-elle représenter sous forme de combinaison linéaire de deux solutions quelconques linéairement indépendantes $v_1(s)$, $v_2(s)$, de (21). On aboutit ainsi aux relations fonctionnelles qui lient entre elles les fonctions du type hypergéométrique de la variable $z$ et celles de la variable $s = z^2$.

Considérons quelques exemples caractéristiques.

*Exemple 1.* Supposons que la fonction $u(z)$ satisfait à l'équation

$$(1 - z^2)\,u'' - (\alpha + \beta + 1)\,zu' - \alpha\beta u = 0$$

qui ne varie pas quand on change $z$ et $-z$. Réduisant cette équation à la forme canonique par le changement $t = \frac{1}{2}(1 + z)$, on s'assure sans peine qu'elle admet comme solution la fonction

$$u_1(z) = F\left(\alpha,\ \beta,\ \frac{\alpha+\beta+1}{2},\ \frac{1+z}{2}\right).$$

D'autre part, le changement $s = z^2$, $u(z) = v(s)$ nous conduit à l'équation

$$s(1-s)\,v'' + \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha+\beta+2}{2}\,s\right)v' - \frac{\alpha\beta}{4}\,v = 0$$

dont les solutions se laissent exprimer à l'aide des fonctions hypergéométriques des variables $s$, $1 - s$, $1/s$, etc. Comme les fonctions hypergéométriques $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ sont exemptes de singularités pour $z \to 0$, il est naturel de mettre la fonction $u_1(z)$ sous forme de combinaison linéaire des fonctions de la variable $1 - s = 1 - z^2$ et de chercher les coefficients de cette combinaison linéaire en s'appuyant sur le comportement de la fonction $u_1(z)$ pour $z \to -1$.

Conformément aux formules (20) du § 16, on a

$$F\left(\alpha,\ \beta,\ \frac{\alpha+\beta+1}{2},\ \frac{1+z}{2}\right)=C_1F\left(\frac{\alpha}{2},\ \frac{\beta}{2},\ \frac{\alpha+\beta+1}{2},\ 1-z^2\right)+$$
$$+C_2(1-z^2)^{\frac{1-\alpha-\beta}{2}}F\left(\frac{1-\alpha}{2},\ \frac{1-\beta}{2},\ \frac{3-\alpha-\beta}{2},\ 1-z^2\right).$$

Si $\alpha+\beta>1$, la relation précédente nous donne $C_2=0$, $C_1=1$ pour $z\to-1$, i.e.

$$F\left(\alpha,\ \beta,\ \frac{\alpha+\beta+1}{2},\ \frac{1+z}{2}\right)=F\left(\frac{\alpha}{2},\ \frac{\beta}{2},\ \frac{\alpha+\beta+1}{2},\ 1-z^2\right),$$

ce qui équivaut à l'égalité

$$F\left(2\alpha,\ 2\beta,\ \alpha+\beta+\frac{1}{2},\ t\right)=F\left(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta+\frac{1}{2},\ 4t(1-t)\right).$$

En vertu du principe du prolongement analytique cette relation reste vraie pour des $\alpha$ et $\beta$ quelconques.

*Exemple 2.* Considérons l'équation pour la fonction d'Hermite $u=H_\nu(z)$:

$$u''-2zu'+2\nu u=0.$$

Cette équation reste inchangée quand on passe de $z$ à $-z$. Posant $s=z^2$, $u(z)=v(s)$, on obtient l'équation

$$sv''+\left(\frac{1}{2}-s\right)v'+\frac{\nu}{2}v=0$$

dont les solutions se laissent exprimer à l'aide des fonctions hypergéométriques dégénérées:

$$v(s)=C_1F\left(-\frac{\nu}{2},\ \frac{1}{2},\ s\right)+C_2s^{\frac{1}{2}}F\left(\frac{1-\nu}{2},\ \frac{3}{2},\ s\right).$$

D'où

$$H_\nu(z)=C_1F\left(-\frac{\nu}{2},\ \frac{1}{2},\ z^2\right)+C_2zF\left(\frac{1-\nu}{2},\ \frac{3}{2},\ z^2\right).$$

Il est facile de voir que

$$C_1=H_\nu(0),\qquad C_2=H'_\nu(0).$$

On aboutit donc, en utilisant (19), à la relation

$$H_\nu(z)=\frac{2^\nu\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}F\left(-\frac{\nu}{2},\ \frac{1}{2},\ z^2\right)-$$
$$-\frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}zF\left(\frac{1-\nu}{2},\ \frac{3}{2},\ z^2\right). \tag{22}$$

A l'aide de (22) et du développement (6), on arrive à développer la fonction d'Hermite $H_\nu(z)$ en une série de puissances.

Si $-\pi/2 < \arg z \leqslant \pi/2$, cette relation se transcrit à l'aide de (16) sous la forme

$$H_\nu(z) = 2^\nu G\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right). \tag{23}$$

A partir des relations fonctionnelles (22) et (23), on obtient la représentation asymptotique de la fonction d'Hermite en utilisant les représentations asymptotiques établies plus haut pour les fonctions hypergéométriques dégénérées $F(\alpha, \gamma, z)$ et $G(\alpha, \gamma, z)$. En particulier, pour $-\pi/2 < \arg z \leqslant \pi/2$ on a

$$H_\nu(z) = (2z)^\nu\,[1 + O(1/z^2)]. \tag{24}$$

Notons que toutes les relations fonctionnelles déduites ci-dessus cessent d'avoir un sens pour certaines valeurs des paramètres: il s'agit des cas où les relations indiquées contiennent les fonctions $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ et $F(\alpha, \gamma, z)$ dans lesquelles $\gamma = -n$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Lorsque ces cas se présentent, il convient de prendre au lieu de $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ et $F(\alpha, \gamma, z)$ les fonctions

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma, z)$$

et

$$\varphi(\alpha, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \gamma, z)$$

et de lever l'indétermination d'après la règle de L'Hospital pour $\gamma \to -n$ de la même façon que dans le cas des fonctions cylindriques $H_\nu^{(1,2)}(z)$ pour $\nu = n$ (cf. § 14, nº 4).

*Exemple 3.* Examinons, à titre de cas particulier, la relation fonctionnelle (16) pour $\gamma = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Remplaçons dans cette relation les fonctions $F(\alpha, \gamma, z)$ par les fonctions $\varphi(\alpha, \gamma, z)$ et appliquons la formule de complément de la fonction gamma (voir Appendice A):

$$G(\alpha, \gamma, z) = \frac{\pi}{\sin \pi\gamma}\left[\frac{\varphi(\alpha, \gamma, z)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\gamma}\varphi(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z)\right]. \tag{25}$$

La valeur de $\gamma = n$ dans le second membre de (25) est un point singulier apparent. Passons dans (25) à la limite pour $\gamma \to n$. Calculant les limites par la règle de L'Hospital, on obtient

$$G(\alpha, n, z) = (-1)^n \left\{\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[\frac{\varphi(\alpha, \gamma, z)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial\gamma}\left[z^{1-\gamma}\varphi(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z)\right]\right\}\Bigg|_{\gamma=n}.$$

En faisant intervenir le développement de $\varphi(\alpha, \gamma, z)$ en série suivant les puissances de $z$, on en déduit le développement correspondant de $G(\alpha, n, z)$:

$$G(\alpha, n, z)=(-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k z^k}{k!\,\Gamma(n+k)\,\Gamma(\alpha-n+1)} \times$$

$$\times [\psi(\alpha-n+1)-\psi(n+k)]+(-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha-n+1)_k z^{k-n+1}}{k!\,\Gamma(2-n+k)\,\Gamma(\alpha)} \times$$

$$\times [\ln z+\psi(\alpha-n+1+k)-\psi(\alpha-n+1)-\psi(2-n+k)]. \quad (26)$$

Ici $\psi(z)$ est la dérivée logarithmique de la fonction $\Gamma(z)$ (voir Appendice A). Si dans la dernière somme de (26) on a $2-n+k=$ $=-s$ $(s=0, 1, \ldots)$, il convient de prendre en considération les relations

$$\frac{1}{\Gamma(-s)}=0, \quad \frac{\psi(-s)}{\Gamma(-s)}=(-1)^{s+1} s!.$$

Il convient donc de décomposer la dernière somme de (26) en deux parties dont la première contiendra les termes pour $0 \leqslant k \leqslant n-2$, et la seconde, pour $k \geqslant n-1$. Il est commode de changer l'indice de sommation $k$ dans la première partie de la somme en $n-1-k$, et dans la seconde, en $n-1+k$. On obtient finalement

$$G(\alpha, n, z)=\frac{(-1)^n}{(n-1)!\,\Gamma(\alpha-n+1)} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(\alpha-k)_k (n-k)_k} z^{-k}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k z^k}{k!\,(n)_k} [\ln z+\psi(\alpha+k)-\psi(n+k)-\psi(k+1)]\right\} \quad (27)$$

(pour $n=1$ on admettra que la première somme s'annule).

**4. Cas spéciaux.** Considérons le problème de choix des solutions linéairement indépendantes de l'équation hypergéométrique pour des nombres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ quelconques. Si $\gamma \neq n$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, l'équation hypergéométrique admet comme solutions linéairement indépendantes les fonctions

$$u_1(z)=F(\alpha, \beta, \gamma, z),$$
$$u_2(z)=z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, z).$$

Si, par contre, $\gamma=n$, une de ces fonctions n'a plus de sens, et la question se pose de chercher la seconde solution linéairement indépendante de l'équation hypergéométrique.

Plaçons-nous d'abord dans le cas où $\gamma=n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ et les nombres $\alpha$, $\beta$ et $\alpha+\beta$ ne sont pas des entiers. On peut uti-

liser comme solutions linéairement indépendantes les fonctions

$$F(\alpha, \beta, n, z) \text{ et } F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-n+1, 1-z).$$

Pour voir si ces deux fonctions sont bien linéairement indépendantes, examinons leur comportement pour $z \to 0$. On sait que $F(\alpha, \beta, n, 0) = 1$. Afin d'étudier le comportement de la fonction $F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - n + 1, 1 - z)$ pour $z \to 0$, nous ferons intervenir la relation fonctionnelle qui se déduit de (13) en remplaçant $\gamma$ par $\alpha + \beta - \gamma + 1$ et $z$ par $1 - z$:

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-z) = \\ = \Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)\left[\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\,\Gamma(\beta-\gamma+1)} F(\alpha, \beta, \gamma, z) + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, z)\right]. \quad (28)$$

Afin de lever l'indétermination pour $\gamma = n$ dans (28), on remplacera les fonctions hypergéométriques par les fonctions

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma, z).$$

A l'aide de la formule $\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z$, on mettra (28) sous une forme différente:

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-z) = \\ = \Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)\frac{\pi}{\sin \pi\gamma}\left[\frac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\,\Gamma(\beta-\gamma+1)} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} z^{1-\gamma}\varphi(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, z)\right]. \quad (29)$$

La valeur de $\gamma = n$ dans le second membre est un point singulier apparent. Passons dans (29) à la limite pour $\gamma \to n$ en calculant les limites par la règle de L'Hospital:

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-n+1, 1-z) = \\ = (-1)^n\,\Gamma(\alpha+\beta-n+1)\left\{\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[\frac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\,\Gamma(\beta-\gamma+1)}\right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[z^{1-\gamma}\varphi(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, z)\right]\right\}\Bigg|_{\gamma=n} = \\ = (-1)^n\,\Gamma(\alpha+\beta-n+1)\left\{\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[\frac{F(\alpha, \beta, \gamma, z)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\,\Gamma(\beta-\gamma+1)\,\Gamma(\gamma)}\right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[\frac{z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, z)}{\Gamma(2-\gamma)}\right]\right\}\Bigg|_{\gamma=n}.$$

D'où

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-n+1, 1-z) = \\ = \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha+\beta-n+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\beta-n+1)(n-1)!}\{[\psi(\alpha-n+1)+ \\ +\psi(\beta-n+1)-\psi(n)]F(\alpha, \beta, n, z)+\Phi(\alpha, \beta, n, z)\}, \quad (30)$$

où

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\partial}{\partial\gamma}F(\alpha, \beta, \gamma, z) - \frac{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial\gamma}\left[z^{1-\gamma}\frac{F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, z)}{\Gamma(2-\gamma)}\right]. \quad (31)$$

Développons la fonction $\Phi(\alpha, \beta, n, z)$ en série suivant les puissances de $z$; à cet effet, nous utiliserons les développements correspondants des fonctions hypergéométriques. On a pour $|z|<1$

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma, z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{k!(\gamma)_k}z^k[\psi(\gamma)-\psi(\gamma+k)] + \\ + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha-\gamma+1+k)\Gamma(\beta-\gamma+1+k)}{k!\,\Gamma(2-\gamma+k)}z^{k+1-\gamma} \times \\ \times[\ln z+\psi(\alpha-\gamma+1+k)-\psi(\alpha-\gamma+1)+ \\ +\psi(\beta-\gamma+1+k)-\psi(\beta-\gamma+1)-\psi(2-\gamma+k)].$$

Faisant dans cette relation, pour $\gamma = n$, les mêmes transformations que lors du passage de (26) à (27), on obtient

$$\Phi(\alpha, \beta, n, z) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(n-k)_k(\alpha-k)_k(\beta-k)_k}z^{-k} + \\ + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{k!(n)_k}z^k[\ln z+\psi(\alpha+k)-\psi(\alpha-n+1)+\psi(\beta+k)- \\ -\psi(\beta-n+1)+\psi(n)-\psi(n+k)-\psi(k+1)]. \quad (32)$$

Cette expression garde aussi un sens pour $n = 1$, à condition de poser la première somme de (32) égale à zéro.

Les expressions (30) et (32) permettent de voir que, lorsque les nombres $\alpha$, $\beta$ et $\alpha+\beta$ ne sont pas des entiers, les fonctions $F(\alpha, \beta, n, z)$ et $F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-n+1, 1-z)$ sont linéairement indépendantes, car elles se comportent de façon différente quand $z \to 0$. On peut donc choisir comme solutions linéairement indépendantes de l'équation hypergéométrique, dans le cas considéré, les fonctions $F(\alpha, \beta, n, z)$ et $F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-n+1, 1-z)$. Il est préférable d'adopter comme seconde solution linéairement indépendante, au lieu de $F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-n+1, 1-z)$, la fonction

$\Phi(\alpha, \beta, n, z)$, car il devient possible alors d'affaiblir les contraintes imposées aux paramètres $\alpha$ et $\beta$. En effet, il découle de la formule (30) que $\Phi(\alpha, \beta, \gamma, z)$ est solution de l'équation hypergéométrique pour $\gamma = n$ si $\alpha$, $\beta$ et $\alpha + \beta$ ne sont pas des entiers, car cette fonction représente une combinaison linéaire de deux solutions de l'équation indiquée, à savoir: $F(\alpha, \beta, n, z)$ et $F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - n + 1, 1 - z)$. D'autre part, la fonction $\Phi(\alpha, \beta, n, z)$ et ses dérivées par rapport à $z$ sont des fonctions analytiques de chacune des variables pour $|\arg z| < \pi$, ainsi qu'il résulte de (31), quelles que soient les valeurs des paramètres, à l'exception du cas où le facteur

$$\frac{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} = \frac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-n+1)}$$

devient infini, ce qui a lieu pour $\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$ ou $\beta = 1, 2, \ldots, n-1$. Pour cette raison, quand $\gamma = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et

$$\frac{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \neq \infty,$$

l'équation hypergéométrique admet comme solutions linéairement indépendantes les fonctions $F(\alpha, \beta, n, z)$ et $\Phi(\alpha, \beta, n, z)$. Par contre, quand $\gamma = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ mais

$$\frac{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} = \infty,$$

les deux solutions linéairement indépendantes de l'équation hypergéométrique, de même que pour $\gamma \neq 0, \pm 1, \ldots$, seront les fonctions $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ et $z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, z)$, puisque cette dernière fonction a un sens pour $\gamma = n$ et pour des $\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$ ou $\beta = 1, 2, \ldots, n-1$ entiers. La fonction en question est dans ce cas un polynôme, vu que les nombres $\alpha - \gamma + 1$ ou $\beta - \gamma + 1$ sont des entiers négatifs plus grands que $2 - \gamma$ (voir n° 2).

L'expression (32) de $\Phi(\alpha, \beta, n, z)$ devient indéterminée quand $\alpha$ ou $\beta$ prennent les valeurs $0, -1, -2, \ldots$ On arrive à lever l'indétermination pour $\alpha = -m$ $(m = 0, 1, \ldots)$ en appliquant les formules de complément des fonctions $\Gamma(z)$ et $\psi(z)$ avec $z \leqslant 0$:

$$(\alpha)_k[\psi(\alpha+k)-\psi(\alpha-n+1)]|_{\alpha=-m} = \begin{cases} (-1)^m(k-m-1)! & (\alpha+k>0), \\ (-1)^k\dfrac{m!}{(m-k)!}[\psi(m+1-k)-\psi(m+n)] & (\alpha+k\leqslant 0). \end{cases}$$

L'indétermination est levée d'une façon analogue dans le produit

$(\beta)_k[\psi(\beta+k)-\psi(\beta-n+1)]$ pour $\beta = 0, -1, -2, \ldots$

Reste à considérer le cas où l'on a dans l'équation hypergéométrique $\gamma = -n$ ($n = 0, 1, \ldots$). Ce cas se laisse cependant réduire au précédent: en effet, rappelons-nous que l'équation hypergéométrique pour la fonction $u(z)$ se réduit, moyennant le changement $u = z^{1-\gamma}y$, à l'équation hypergéométrique pour $y(z)$ aux paramètres $\alpha' = \alpha - \gamma + 1$, $\beta' = \beta - \gamma + 1$, $\gamma' = 2 - \gamma$ (voir § 19, n° 2). Ainsi donc, quand $\gamma = -n$, l'équation hypergéométrique admet comme solutions linéairement indépendantes les fonctions suivantes:

a) $$u_1(z) = z^{n+1}F(\alpha + n + 1,\ \beta + n + 1,\ n + 2,\ z),$$
$$u_2(z) = z^{n+1}\Phi(\alpha + n + 1,\ \beta + n + 1,\ n + 2,\ z),$$

si

$$\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)} \neq \infty;$$

b) $$u_1(z) = F(\alpha,\ \beta,\ -n,\ z),$$
$$u_2(z) = z^{n+1}F(\alpha + n + 1,\ \beta + n + 1,\ n + 2,\ z),$$

si

$$\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)} = \infty.$$

Les considérations exposées permettent donc de définir toutes les solutions linéairement indépendantes de l'équation hypergéométrique et de l'équation hypergéométrique dégénérée, quelles que soient les valeurs des paramètres figurant dans ces équations.

Nous donnons en conclusion un tableau qui résume les paires de solutions linéairement indépendantes $u_1(z)$, $u_2(z)$ de l'équation hypergéométrique en fonction des valeurs de $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$.

*Tableau 4*

**Solutions linéairement indépendantes de l'équation hypergéométrique (cas spéciaux)**

| $\gamma$ | $\alpha$, $\beta$ | $u_1(z)$ | $u_2(z)$ |
|---|---|---|---|
| $\gamma \neq 0, \pm 1, \ldots$ | $\alpha$, $\beta$ quelconques | $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ | $z^{1-\gamma}F(\alpha', \beta', \gamma', z)$ |
| $\gamma = 1 + m$, $m = 0, 1, \ldots$ | $(\alpha')_m(\beta')_m = 0$ | idem | idem |
| | $(\alpha')_m(\beta')_m \neq 0$ | idem | $\Phi(\alpha, \beta, \gamma, z)$ |
| $\gamma = 1 - m$, $m = 1, \ldots$ | $(\alpha)_m(\beta)_m = 0$ | idem | $z^{1-\gamma}F(\alpha', \beta', \gamma', z)$ |
| | $(\alpha)_m(\beta)_m \neq 0$ | $z^{1-\gamma}\Phi(\alpha', \beta', \gamma', z)$ | idem |

Ici $(\alpha)_k = \alpha(\alpha + 1)\cdots(\alpha + k - 1)$, $(\alpha)_0 = 1$, $\alpha' = \alpha - \gamma + 1$, $\beta' = \beta - \gamma + 1$, $\gamma' = 2 - \gamma$.

## § 21. Représentation de quelques fonctions spéciales à l'aide des fonctions du type hypergéométrique

Beaucoup de fonctions spéciales que l'on rencontre dans les problèmes de physique mathématique et théorique se laissent exprimer à l'aide des fonctions du type hypergéométrique : la fonction hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, les fonctions hypergéométriques dégénérées $F(\alpha, \gamma, z)$ et $G(\alpha, \gamma, z)$, la fonction d'Hermite $H_\nu(z)$. Cela permet d'appliquer aux fonctions spéciales intéressées les résultats obtenus précédemment pour les fonctions du type hypergéométrique : développements en séries de puissances, représentations asymptotiques, relations de récurrence, formules de dérivation. Nous allons considérer quelques exemples caractéristiques.

**1. Quelques fonctions élémentaires.** Les fonctions les plus simples sont $F(\alpha, 0, \gamma, z)$, $F(0, \gamma, z)$ et $G(0, \gamma, z)$. En effet, les séries de puissances correspondantes et la relation (16) du § 20 permettent d'obtenir

$$F(\alpha, 0, \gamma, z) = F(0, \gamma, z) = G(0, \gamma, z) = 1.$$

Les relations fonctionnelles (14), (17) et (23) du § 19 nous donnent

$$F(\alpha, \beta, \beta, z) = (1-z)^{-\alpha} F(\beta-\alpha, 0, \beta, z) = (1-z)^{-\alpha},$$

$$F(\alpha, \alpha, z) = e^z F(0, \alpha, -z) = e^z,$$

$$G(\alpha, \alpha+1, z) = z^{-\alpha} G(0, 1-\alpha, z) = z^{-\alpha}.$$

**2. Polynômes de Jacobi, de Laguerre et d'Hermite. Polynômes orthogonaux classiques d'une variable discrète.** On a vu au § 2 que les solutions polynomiales de l'équation différentielle du type hypergéométrique

$$\sigma(z) y'' + \tau(z) y' + \lambda y = 0 \tag{1}$$

se laissent définir de façon univoque, à un facteur de normalisation près. Il suffit donc, pour définir les polynômes du type hypergéométrique, de connaître toutes les solutions particulières polynomiales de (1). D'autre part, les solutions de l'équation (1) se laissent exprimer à l'aide des fonctions hypergéométriques, des fonctions hypergéométriques dégénérées ou des fonctions d'Hermite, ce qui dépend du degré du polynôme $\sigma(z)$. Cela permet d'établir la relation entre les polynômes de Jacobi, de Laguerre, d'Hermite d'une part et les fonctions $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, $F(\alpha, \gamma, z)$, $G(\alpha, \gamma, z)$ et $H_\nu(z)$ d'autre part.

1) *Polynômes de Jacobi.* Pour les polynômes de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ l'équation différentielle s'écrit

$$(1-z^2) y'' + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2) z] y' + n(n+\alpha+\beta+1) y = 0.$$

Par le changement $z = 1 - 2s$, on la réduit à l'équation hypergéométrique

$$s(1-s)y'' + [\gamma_1 - (\alpha_1 + \beta_1 + 1)s]y' - \alpha_1\beta_1 y = 0$$

dans laquelle $\alpha_1 = -n$, $\beta_1 = n + \alpha + \beta + 1$, $\gamma_1 = \beta + 1$. Cette équation admet comme solution particulière polynomiale la fonction

$$y(z) = F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, s) = \\ = F(-n, n+\alpha+\beta+1, \alpha+1, (1-z)/2).$$

On a donc

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = C_n F(-n, n+\alpha+\beta+1, \alpha+1, (1-z)/2).$$

La constante $C_n$ se détermine sans peine en posant $z = 1$ (voir § 7, n° 2). On obtient alors

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)} F\left(-n, n+\alpha+\beta+1, \alpha+1, \frac{1-z}{2}\right). \quad (2)$$

La relation (voir § 6, n° 6)

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = (-1)^n P_n^{(\beta, \alpha)}(-z)$$

permet d'écrire (2) sous forme équivalente:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = \\ = \frac{(-1)^n\,\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,\Gamma(\beta+1)} F\left(-n, n+\alpha+\beta+1, \beta+1, \frac{1+z}{2}\right). \quad (3)$$

Posant dans (2) et (3) $\alpha = \beta = 0$, on arrive à exprimer les *polynômes de Legendre* à l'aide des fonctions hypergéométriques:

$$P_n(z) = F\left(-n, n+1, 1, \frac{1-z}{2}\right) = \\ = (-1)^n F\left(-n, n+1, 1, \frac{1+z}{2}\right).$$

2) *Polynômes de Laguerre.* L'équation différentielle pour les polynômes de Laguerre $L_n^{\alpha}(z)$

$$zy'' + (1 + \alpha - z)y' + ny = 0$$

admet une solution particulière

$$y(z) = F(-n, 1+\alpha, z)$$

qui est un polynôme. Aussi

$$L_n^{\alpha}(z) = C_n F(-n, 1+\alpha, z).$$

Pour déterminer la constante $C_n$, on pose $z = 0$ (voir § 7, n° 2). Il vient alors

$$L_n^{\alpha}(z) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)} F(-n, 1+\alpha, z).$$

La relation (16) du § 20 permet aussi d'exprimer les polynômes $L_n^\alpha(z)$ à l'aide de la fonction hypergéométrique dégénérée de deuxième espèce $G(\alpha, \gamma, z)$:

$$L_n^\alpha(z) = \frac{(-1)^n}{n!} G(-n, 1+\alpha, z).$$

3) *Polynômes d'Hermite.* L'équation différentielle pour les polynômes d'Hermite

$$y'' - 2zy' + 2ny = 0$$

admet comme solution particulière la fonction d'Hermite $H_n(z)$ qui est un polynôme de degré $n$. En effet, on a en vertu de la relation fonctionnelle (22) du § 20

$$H_{2n}(z) = \frac{2^{2n}\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/2-n)} F\left(-n, \frac{1}{2}, z^2\right),$$

$$H_{2n+1}(z) = -\frac{2^{2n+2}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-1/2-n)} zF\left(-n, \frac{3}{2}, z^2\right).$$

Identifiant les coefficients des puissances de plus haut degré dans les fonctions d'Hermite $H_\nu(z)$ pour $\nu = n$ et dans les polynômes d'Hermite, on s'assure que $H_\nu(z)$ se confond avec le polynôme d'Hermite quand $\nu = n$.

Etablissons à présent la relation qui existe entre les polynômes orthogonaux classiques d'une variable discrète et les fonctions hypergéométriques. Nous le ferons à l'aide de la formule de Rodrigues (22) du § 12:

$$y_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \nabla^n \rho_n(x).$$

Pour une fonction $f(x)$, arbitraire, on démontre par récurrence que

$$\nabla^n f(x) = \sum_{k=0}^{n-k} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} f(x-k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k}{k!} f(x-k).$$

Aussi

$$y_n(x) = B_n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k}{k!} \frac{\rho_n(x-k)}{\rho(x)}.$$

On a en particulier pour les polynômes de Meixner $m_n^{(\gamma,\mu)}(x)$

$$\rho_n(x) = \rho(x+n) \prod_{k=1}^{n} \sigma(x+k) = \mu^{x+n} \frac{\Gamma(\gamma+x+n)}{\Gamma(x+1)\Gamma(\gamma)}.$$

D'où

$$\frac{\rho_n(x-k)}{\rho(x)}=\mu^{n-k}\frac{\Gamma(\gamma+x+n-k)\,\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-k+1)\,\Gamma(\gamma+x)}=$$

$$=\mu^{n-k}\frac{\Gamma(\gamma+x+n)}{\Gamma(\gamma+x)}\,\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+1-k)}\,\frac{\Gamma(\gamma+x+n-k)}{\Gamma(\gamma+x+n)}=$$

$$=\mu^{n-k}(\gamma+x)_n\frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{(\gamma+x+n-1)(\gamma+x+n-2)\ldots(\gamma+x+n-k)}=$$

$$=\mu^{n-k}(\gamma+x)_n\frac{(-x)_k}{(-\gamma-x-n+1)_k}.$$

On a donc

$$m_n^{(\gamma,\,\mu)}(x)=(\gamma+x)_n F(-n,\ -x,\ -\gamma-x-n+1,\ 1/\mu).$$

Pour les polynômes de Krawtchouk $k_n^{(p)}(x)$ et de Charlier $c_n^{(\mu)}(x)$, les relations correspondantes se déduisent de façon analogue:

$$k_n^{(p)}(x)=(-N+x)_n\frac{p^n}{n\,!}F\left(-n,\ -x,\ N-n-x+1,\ -\frac{q}{p}\right),$$

$$c_n^{(\mu)}(x)=(-x)_n\,\mu^{-n}F(-n,\ x-n+1,\ \mu).$$

Les polynômes de Hahn $h_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)$ se laissent exprimer d'une façon analogue à l'aide des fonctions hypergéométriques généralisées (voir § 20, nº 2):

$$h_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)=\frac{(\beta+1+x)_n(-N+1+n)_n}{n\,!}\times$$

$$\times\,{}_3F_2(-n,\ -x,\ N+\alpha-x;\ N-x-n,\ -\beta-x-n;\ 1).$$

*Remarque.* En comparant entre elles les formules exprimant les polynômes de Jacobi et ceux de Meixner à l'aide des fonctions hypergéométriques on dégage la relation qui existe entre ces polynômes:

$$m_n^{(\gamma,\,\mu)}(x)=n\,!\,P_n^{(\gamma-1,\ -\gamma-n-x)}\left(\frac{2-\mu}{\mu}\right).$$

On dégage d'une façon analogue la relation qui existe entre les polynômes de Laguerre et ceux de Charlier:

$$c_n^{(\mu)}(x)=\frac{n\,!}{(-\mu)^n}L_n^{x-n}(\mu).$$

**3. Fonctions de deuxième espèce.** La façon la plus simple de dégager la relation qui lie les polynômes orthogonaux classiques $Q_n(z)$ aux fonctions du type hypergéométrique consiste à utiliser directement les représentations intégrales de $Q_n(z)$ (voir § 11, nº 1).

1) *Fonctions de Jacobi de deuxième espèce.* La représentation intégrale de la fonction de Jacobi de deuxième espèce $Q_n^{(\alpha,\,\beta)}(z)$ s'écrit:

$$Q_n^{(\alpha,\,\beta)}(z)=\frac{(-1)^n}{2^n(1-z)^\alpha(1+z)^\beta}\int_{-1}^{1}\frac{(1-s)^{n+\alpha}(1+s)^{n+\beta}}{(s-z)^{n+1}}ds. \qquad (4)$$

Posant $s = 2t - 1$, on obtient

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(z) = -\frac{2^{n+\alpha+\beta+1}}{(1-z)^{\alpha}(1+z)^{n+\beta+1}} \int_0^1 t^{n+\beta}(1-t)^{n+\alpha}\left(1-\frac{2}{1+z}t\right)^{-n-1} dt.$$

En confrontant la formule obtenue avec la représentation intégrale (18) du § 19 de la fonction hypergéométrique, on obtient la représentation suivante de $Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)$:

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(z) = -\frac{2^{n+\alpha+\beta+1}}{(1-z)^{\alpha}(1+z)^{n+\beta+1}} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)} \times F(n+1, n+\beta+1, 2n+\alpha+\beta+2, 2/(1+z)).$$

D'une façon analogue, en posant dans (4) $s = 1 - 2t$, on obtient

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{(-1)^n 2^{n+\alpha+\beta+1}}{(1-z)^{n+\alpha+1}(1+z)^{\beta}} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)} \times F(n+1,\ n+\alpha+1,\ 2n+\alpha+\beta+2,\ 2/(1-z)).$$

2) *Fonctions de Laguerre de deuxième espèce.* La représentation intégrale de la fonction de Laguerre de deuxième espèce $Q_n^{\alpha}(z)$ s'écrit

$$Q_n^{\alpha}(z) = \frac{1}{e^{-z}z^{\alpha}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-s}s^{n+\alpha}}{(s-z)^{n+1}} ds.$$

Soit $z < 0$. Posant $s = -zt$, on obtient

$$Q_n^{\alpha}(z) = e^{z}z^{-\alpha}(-z)^{\alpha} \int_0^{\infty} e^{zt}t^{n+\alpha}(1+t)^{-n-1} dt.$$

En confrontant cette expression avec la représentation intégrale (22) du § 19 de la fonction hypergéométrique dégénérée, on obtient

$$Q_n^{\alpha}(z) = e^{z}z^{-\alpha}(-z)^{\alpha}\Gamma(n+\alpha+1)\, G(n+\alpha+1,\ \alpha+1,\ -z). \tag{5}$$

Puisque l'expression de $Q_n^{\alpha}(z)$ comporte le facteur $z^{\alpha}$, on doit, afin d'assurer l'univocité de la fonction, faire une coupure le long de l'axe réel pour $z > 0$, i.e. $0 < \arg z < 2\pi$. C'est pourquoi, si $z < 0$, on doit poser $z^{-\alpha} = e^{-i\pi\alpha}(-z)^{-\alpha}$. Il vient alors

$$Q_n^{\alpha}(z) = e^{-i\pi\alpha}\,\Gamma(n+\alpha+1)\, e^{z}G(n+\alpha+1,\ \alpha+1,\ -z).$$

Déduite pour $z < 0$, cette relation reste cependant valable pour $z$ quelconque, en vertu du principe du prolongement analytique.

3) *Fonctions d'Hermite de deuxième espèce.* La représentation intégrale d'une fonction d'Hermite de deuxième espèce est

$$Q_n(z) = (-1)^n n!\, e^{z^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} (\xi - z)^{-n-1}\, d\xi.$$

Pour exprimer $Q_n(z)$ à l'aide de la fonction d'Hermite de première espèce, nous profiterons du fait que la fonction $Q_n(z)$ vérifie la même équation que les polynômes d'Hermite. Elle se laisse donc représenter comme combinaison linéaire de deux solutions linéairement indépendantes de l'équation pour les polynômes d'Hermite:

$$Q_n(z) = A_n H_n(z) + B_n e^{z^2} H_{-n-1}(-iz) \tag{6}$$

ou

$$Q_n(z) = C_n H_n(z) + D_n e^{z^2} H_{-n-1}(iz). \tag{7}$$

Pour déterminer les coefficients de ces développements, nous nous servirons des représentations asymptotiques de la fonction $Q_n(z)$ et des fonctions d'Hermite pour $z \to \infty$. Soient $z = iy$ et $y \to +\infty$. On a alors en vertu de la formule (7) du § 11

$$Q_n(z) = -\frac{e^{-y^2}}{(iy)^{n+1}}\, n!\sqrt{\pi}\left[1 + O\left(\frac{1}{y}\right)\right].$$

D'autre part, on a en vertu de (24) du § 20

$$H_n(z) = (2iy)^n\,[1 + O(1/y^2)],$$
$$H_{-n-1}(-iz) = (2y)^{-n-1}\,[1 + O(1/y^2)].$$

D'où $A_n = 0$, $B_n = 2^{n+1} n!\sqrt{\pi}\, e^{-i\frac{\pi(n-1)}{2}}$. Il vient définitivement

$$Q_n(z) = 2^{n+1} n!\sqrt{\pi}\, e^{z^2 - i\frac{\pi(n-1)}{2}} H_{-n-1}(-iz) \qquad (\operatorname{Im} z > 0).$$

De même, la relation $Q_n(\overline{z}) = \overline{Q_n}(z)$, dans laquelle la barre symbolise la conjugaison complexe, nous donne pour $\operatorname{Im} z < 0$

$$Q_n(z) = 2^{n+1} n!\sqrt{\pi}\, e^{z^2 + i\frac{\pi(n-1)}{2}} H_{-n-1}(iz).$$

4. **Fonctions cylindriques.** Par analogie aux cas précédents, la relation entre les fonctions cylindriques et les fonctions hypergéométriques dégénérées de première et de deuxième espèce s'établit sans difficulté en faisant intervenir les représentations intégrales

de ces fonctions. On a par exemple (voir § 16, n° 3)

$$I_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\nu-1/2} \operatorname{ch} zt\, dt,$$

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z} \frac{1}{\Gamma(\nu+1/2)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1/2} \left(1+\frac{t}{2z}\right)^{\nu-1/2} dt.$$

Changeant $t$ en $zt$, on ramène la représentation intégrale de $K_\nu(z)$ à celle de la fonction $G(\nu+1/2,\ 2\nu+1,\ 2z)$:

$$K_\nu(z) = \sqrt{\pi}\,(2z)^\nu e^{-z} G(\nu+1/2,\ 2\nu+1,\ 2z).$$

Pour établir la relation entre $I_\nu(z)$ et la fonction hypergéométrique dégénérée, remarquons qu'on peut, dans l'intégrande de l'expression de $I_\nu(z)$, changer $\operatorname{ch} zt$ en $e^{zt}$, car

$$e^{zt} = \operatorname{ch} zt + \operatorname{sh} zt$$

et l'intégrale d'une fonction impaire prise entre limites symétriques est égale à zéro. Changeant $t$ en $2t-1$ dans la représentation intégrale obtenue, on aboutit à la représentation intégrale suivante:

$$I_\nu(z) = \frac{(2z)^\nu e^{-z}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)} \int_0^1 e^{2zt} [t(1-t)]^{\nu-1/2} dt.$$

D'où

$$I_\nu(z) = \frac{(2z)^\nu e^{-z}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(2\nu+1)} F\left(\nu+\frac{1}{2},\ 2\nu+1,\ 2z\right).$$

La formule de duplication de la fonction gamma nous donne

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\nu+1) = 2^{2\nu}\Gamma(\nu+1/2)\,\Gamma(\nu+1).$$

Il vient en définitive

$$I_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} e^{-z} F(\nu+1/2,\ 2\nu+1,\ 2z).$$

**5. Intégrales elliptiques.** Par *intégrales elliptiques de première* et *de deuxième espèce*, on entend les fonctions

$$K(z) = \int_0^{\pi/2} (1-z^2\sin^2\varphi)^{-1/2}\, d\varphi,$$

$$E(z) = \int_0^{\pi/2} (1-z^2\sin^2\varphi)^{1/2}\, d\varphi.$$

Posant $\sin^2 \varphi = t$, on obtient les représentations intégrales suivantes:

$$K(z) = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{-1/2} (1-t)^{-1/2} (1-z^2t)^{-1/2}\, dt,$$

$$E(z) = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{-1/2} (1-t)^{-1/2} (1-z^2t)^{1/2}\, dt.$$

Confrontant ces représentations avec les représentations intégrales de la fonction hypergéométrique, on obtient

$$K(z) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z^2\right),$$

$$E(z) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, z^2\right).$$

Les relations dégagées permettent d'étudier les propriétés des fonctions $K(z)$ et $E(z)$ pour des $z$ complexes.

**6. Fonctions de Whittaker.** Un cas particulier de l'équation généralisée du type hypergéométrique est l'équation de Whittaker

$$u'' + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{1/4-\mu^2}{z^2}\right) u = 0 \qquad (8)$$

dans laquelle $k$ et $\mu$ sont des constantes. Par le changement $u = z^{\mu+1/2} \times$ $\times e^{-z/2}\, y$ on réduit (8) à l'équation

$$zy'' + (2\mu + 1 - z)\, y' + (k - \mu - 1/2)\, y = 0$$

qui admet comme solutions les fonctions

$$y_1(z) = F(1/2 - k + \mu,\quad 2\mu + 1,\ z),$$
$$y_2(z) = G(1/2 - k + \mu,\ 2\mu + 1,\ z).$$

L'équation de Whittaker admet donc comme solutions particulières

$$u_1(z) = M_{k\mu}(z) = z^{\mu+1/2} e^{-z/2} F\left(\frac{1}{2} - k + \mu,\ 2\mu+1,\ z\right),$$

$$u_2(z) = W_{k\mu}(z) = z^{\mu+1/2} e^{-z/2} G\left(\frac{1}{2} - k + \mu,\ 2\mu+1,\ z\right),$$

appelées *fonctions de Whittaker.*

Les fonctions de Whittaker $M_{k\mu}(z)$ n'ont aucune singularité pour $z \to 0$, et les fonctions $W_{k\mu}(z)$, pour $z \to \infty$.

Puisque l'équation de Whittaker ne varie pas lorsqu'on change $\mu$ en $-\mu$, ou qu'on change simultanément $k$ en $-k$ et $z$ en $-z$, elle admet également comme solutions les fonctions $M_{k,-\mu}(z)$ et $M_{-k,\pm\mu}(-z)$, $W_{k,-\mu}(z)$ et $W_{-k,\pm\mu}(-z)$. Les solutions obtenues vérifient toute une série de relations fonctionnelles qui découlent des relations fonctionnelles correspondantes pour les fonctions hypergéométriques dégénérées. On a par exemple

$$M_{-k,\mu}(-z) = (-z)^{\mu+1/2} e^{z/2} F\left(\frac{1}{2} + k + \mu,\ 2\mu+1,\ -z\right) =$$
$$= (-z)^{\mu+1/2} e^{-z/2} F\left(\frac{1}{2} - k + \mu,\ 2\mu+1,\ z\right),$$

ce qui veut dire que les fonctions $M_{k\mu}(z)$ et $M_{-k\mu}(-z)$ sont linéairement dépendantes. De la relation fonctionnelle (23) du § 19 il ressort que

$$W_{k,\,-\mu}(z) = W_{k\mu}(z).$$

## § 22. Intégrales définies des fonctions du type hypergéométrique

Rencontrant dans les applications des intégrales définies dans lesquelles interviennent des fonctions du type hypergéométrique, on les calcule soit à l'aide des représentations intégrales des fonctions du type hypergéométrique, soit au moyen du développement en séries de ces dernières. Nous nous bornerons à considérer quelques exemples.

1) L'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} x^\nu F(\alpha,\ \gamma,\ kx)\, dx \qquad (\operatorname{Re}\lambda > \operatorname{Re}k,\ \operatorname{Re}\nu > -1)$$

se calcule facilement en faisant intervenir la représentation intégrale (19) du § 19 et en admettant provisoirement que $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0$ et $\lambda > k > 0$:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} x^\nu F(\alpha,\ \gamma,\ kx)\, dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\, dt \int_0^\infty e^{-\lambda x + kxt} x^\nu\, dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\lambda^{\nu+1}} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\left(1-\frac{k}{\lambda}t\right)^{-\nu-1} dt.$$

La représentation intégrale (18) du § 19 nous donne

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} x^\nu F(\alpha,\ \gamma,\ kx)\, dx = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\lambda^{\nu+1}} F\left(\alpha,\ \nu+1,\ \gamma,\ \frac{k}{\lambda}\right).$$

La formule obtenue peut être étendue à des valeurs arbitraires de $\alpha$, $\gamma$, $\lambda$ et $k$ en vertu du principe du prolongement analytique.

2) L'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} J_\nu(bx)\, x^\rho\, dx$$

se prête aisément au calcul à l'aide du développement en série de la fonction de Bessel $J_\nu(bx)$. On a

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} J_\nu(bx)\, x^\rho\, dx = \int_0^\infty e^{-a^2x^2} \left[ \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k (bx/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \right] x^\rho\, dx =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k (b/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \int_0^\infty e^{-a^2x^2} x^{\nu+\rho+2k}\, dx.$$

D'autre part,

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} x^{\nu+\rho+2k}\, dx = \frac{1}{2a^{\nu+\rho+2k+1}} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{\nu+\rho-1}{2}+k}\, dt =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\rho+1}{2}+k\right)}{2a^{\nu+\rho+2k+1}}.$$

D'où

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} J_\nu(bx)\, x^\rho\, dx = \frac{1}{2a^{\rho+1}} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \left(\frac{b}{2a}\right)^{\nu+2k} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\rho+1}{2}+k\right)}{k!\,\Gamma(\nu+1+k)}.$$

Le développement (6) du § 20 de la fonction hypergéométrique dégénérée et la relation fonctionnelle (17) du § 19 permettent d'exprimer l'intégrale en question à l'aide des fonctions hypergéométriques dégénérées:

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} J_\nu(bx)\, x^\rho\, dx =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\rho+1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)} \frac{\left(\frac{b}{2a}\right)^\nu}{2a^{\rho+1}} F\left(\frac{\nu+\rho+1}{2},\ \nu+1,\ -\frac{b^2}{4a^2}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\rho+1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)} \frac{\left(\frac{b}{2a}\right)^\nu}{2a^{\rho+1}} e^{-\frac{b^2}{4a^2}} F\left(\frac{\nu+1-\rho}{2},\ \nu+1,\ \frac{b^2}{4a^2}\right). \quad (1)$$

3) Considérons *l'intégrale de Sonine-Gegenbauer*

$$\int_0^\infty \frac{K_\mu\left(a\sqrt{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^{\mu/2}} J_\nu(bx)\, x^{\nu+1}\, dx$$

$$(a>0,\ b>0,\ y>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1).$$

Pour calculer cette intégrale, nous ferons intervenir la représentation intégrale de Sommerfeld pour la fonction de Macdonald et la

formule (1) pour $\rho = \nu + 1$. On a

$$\int_0^\infty \frac{K_\mu(a\sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)^{\mu/2}} J_\nu(bx)\, x^{\nu+1}\, dx =$$

$$= \frac{a^\mu}{2^{\mu+1}} \int_0^\infty J_\nu(bx)\, x^{\nu+1}\, dx \int_0^\infty e^{-t-\frac{a^2(x^2+y^2)}{4t}} \frac{dt}{t^{\mu+1}} =$$

$$= \frac{a^\mu}{2^{\mu+1}} \int_0^\infty e^{-t-\frac{a^2y^2}{4t}} \frac{dt}{t^{\mu+1}} \int_0^\infty e^{-\frac{a^2x^2}{4t}} J_\nu(bx)\, x^{\nu+1}\, dx =$$

$$= 2^{\nu-\mu} a^{\mu-2\nu-2} b^\nu \int_0^\infty e^{-t\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)-\frac{a^2y^2}{4t}} \frac{dt}{t^{\mu-\nu}} =$$

$$= \frac{2^{\nu-\mu} b^\nu}{a^\mu} (a^2+b^2)^{\mu-\nu-1} \int_0^\infty e^{-u-\frac{y^2(a^2+b^2)}{4u}} \frac{du}{u^{\mu-\nu}} =$$

$$= \frac{b^\nu}{a^\mu} \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{y}\right)^{\mu-\nu-1} K_{\mu-\nu-1}\left(y\sqrt{a^2+b^2}\right).$$

Ainsi donc,

$$\int_0^\infty \frac{K_\mu(a\sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)^{\mu/2}} J_\nu(bx)\, x^{\nu+1}\, dx =$$

$$= \frac{b^\nu}{a^\mu} \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{y}\right)^{\mu-\nu-1} K_{\mu-\nu-1}\left(y\sqrt{a^2+b^2}\right). \quad (2)$$

Citons quelques conséquences de la relation (2).

a) Soit $\mu = 1/2$. Puisque

$$K_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z},$$

on a

$$\int_0^\infty \frac{e^{-a\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} J_\nu(bx)\, x^{\nu+1}\, dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi b}} \left(\frac{by}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^{\nu+1/2} K_{\nu+1/2}\left(y\sqrt{a^2+b^2}\right). \quad (3)$$

En particulier, on obtient pour $\nu = 0$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-a\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} J_0(bx)\, x\, dx = \frac{e^{-y\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{a^2+b^2}}. \quad (4)$$

Pour $y \to 0$ et $\nu + 1/2 > 0$ la formule (3) nous donne

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_\nu(bx)\, x^\nu\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi(a^2+b^2)}} \left(\frac{2b}{a^2+b^2}\right)^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right). \qquad (5)$$

En déduisant (5), nous avons profité du fait que pour $\nu > 0$ et $z \to 0$ on a

$$K_\nu(z) \approx \frac{\pi}{2\sin\pi\nu} \frac{(z/2)^{-\nu}}{\Gamma(-\nu+1)} = \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}.$$

b) Soient dans (2) $\nu < 2\mu - 3/2$ et $a \to 0$. Puisqu'on a alors

$$K_\mu(az) \approx \frac{\Gamma(\mu)}{2} \left(\frac{az}{2}\right)^{-\mu},$$

il vient

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu(bx)\, x^{\nu+1}}{(x^2+y^2)^\mu}\, dx = \left(\frac{b}{2y}\right)^{\mu-1} \frac{y^\nu}{\Gamma(\mu)} K_{\mu-\nu-1}(by). \qquad (6)$$

Posant ici $\mu = 3/2$ et $\nu = 0$, on obtient

$$\int_0^\infty \frac{J_0(bx)\, x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\, dx = \frac{e^{-by}}{y}. \qquad (7)$$

Nous avons déduit les relations (2) à (7) en imposant certaines restrictions aux paramètres. Or, le principe du prolongement analytique permet d'étendre les résultats obtenus à un domaine plus vaste des valeurs des paramètres. En particulier, la relation (6) reste vraie pour

$$-1 < \operatorname{Re}\nu < 2\operatorname{Re}\mu - 1/2.$$

D'où l'on déduit pour $\mu = 1/2$ et $\nu = 0$

$$\int_0^\infty \frac{xJ_0(bx)}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx = \frac{e^{-by}}{b}.$$

CHAPITRE V

# QUELQUES PROBLÈMES RÉSOLUS DE MÉCANIQUE QUANTIQUE ET DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Dans les chapitres précédents nous avons étudié les différentes propriétés des solutions d'une équation généralisée du type hypergéométrique

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)} u' + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)} u = 0$$

dans laquelle $\sigma(z)$ et $\tilde{\sigma}(z)$ sont des polynômes de degré non supérieur à 2 et $\tilde{\tau}(z)$ un polynôme de degré non supérieur à 1. Le présent chapitre est consacré à l'application des solutions obtenues à certains problèmes importants de mécanique quantique et de physique mathématique.

## § 23. Réduction des équations aux dérivées partielles à des équations différentielles ordinaires par séparation des variables

**1. Schéma général de la méthode de séparation des variables.** Les équations généralisées du type hypergéométrique apparaissent généralement quand on cherche à résoudre des équations de physique mathématique et de mécanique quantique par la méthode de séparation des variables. Rappelons-en les grandes lignes. La méthode est appliquée lorsqu'il s'agit de chercher des solutions particulières d'une équation du type

$$Lu = 0, \tag{1}$$

où l'opérateur $L$ peut s'écrire

$$L = L_1 L_2 + M_1 M_2. \tag{2}$$

Les opérateurs $L_1$, $M_1$ n'agissent que sur un certain groupe de variables dont dépend la fonction $u$, tandis que l'action des opérateurs $L_2$, $M_2$ s'étend sur les variables qui restent. Le produit des opérateurs est le résultat de leur mise en œuvre consécutive. Tous les opérateurs

$L_i$, $M_i$ $(i = 1, 2)$ sont supposés linéaires, i.e.

$$L_i (C_1 u + C_2 v) = C_1 L_i u + C_2 L_i v,$$
$$M_i (C_1 u + C_2 v) = C_1 M_i u + C_2 M_i v$$

($C_1$, $C_2$ sont des constantes).

*Exemple.* Soit $Lu = u_{xx} + u_{yy}$. On a alors

$$L_1 = \partial^2/\partial x^2, \quad L_2 = E, \quad M_1 = E, \quad M_2 = \partial^2/\partial y^2,$$

où $E$ est l'opérateur unité.

Pour les opérateurs du type (2), on cherche la solution particulière de (1) sous la forme $u = u_1 u_2$, où la fonction $u_1$ ne dépend que du premier groupe de variables, et $u_2$ dépend des variables qui restent. Puisque

$$L_1 L_2 (u_1 u_2) = L_1 u_1 \cdot L_2 u_2,$$
$$M_1 M_2 (u_1 u_2) = M_1 u_1 \cdot M_2 u_2,$$

l'équation $Lu = 0$ peut s'écrire aussi comme suit:

$$\frac{L_1 u_1}{M_1 u_1} = -\frac{M_2 u_2}{L_2 u_2}.$$

Les fonctions $\frac{L_1 u_1}{M_1 u_1}$ et $\frac{M_2 u_2}{L_2 u_2}$ étant indépendantes l'une des variables du second groupe et l'autre des variables du premier groupe, il vient

$$\frac{L_1 u_1}{M_1 u_1} = -\frac{M_2 u_2}{L_2 u_2} = \lambda,$$

où $\lambda$ est une constante. On obtient ainsi deux équations dont chacune comprend des fonctions qui ne dépendent que d'une partie des variables initiales:

$$L_1 u_1 = \lambda M_1 u_1, \quad M_2 u_2 = -\lambda L_2 u_2. \tag{3}$$

Puisque l'opérateur $L$ est linéaire, la combinaison linéaire des solutions

$$u = \sum_i C_i u_{1i} u_{2i} \quad (C_i \text{ étant des constantes})$$

qui correspondent aux différentes valeurs possibles de $\lambda = \lambda_i$ est solution de l'équation (1). Sous certaines conditions (complétude de l'ensemble des solutions particulières), toute solution de l'équation $Lu = 0$ se laisse écrire sous la forme $u = \sum_i C_i u_{1i} u_{2i}$ *).

Nous venons de réduire l'équation initiale à un ensemble d'équations comportant un moins grand nombre de variables. Les cas où

*) Voir Tichonov A., Samarskij A. *Equazioni di fisica matematica.* Ed. « Mir », 1981.

l'on arrive à réduire l'équation initiale, par séparations successives des variables, à un ensemble d'équations différentielles ordinaires sont particulièrement intéressants.

**2. Passage aux coordonnées curvilignes.** Nous venons de considérer les traits généraux de la méthode de séparation des variables appliquée aux équations du type $Lu = 0$ dans lesquelles $L$ est un opérateur linéaire d'une structure particulière. Dans des problèmes concrets liés à la recherche d'une solution de l'équation $Lu = 0$ vérifiant certaines conditions aux limites, la méthode de séparation des variables s'avère très efficace si les variables se séparent non seulement dans l'équation mais aussi dans les conditions aux limites. Pour en arriver, on utilise souvent, au lieu des coordonnées cartésiennes, d'autres variables indépendantes, susceptibles de mettre à profit la symétrie du problème. On doit choisir les coordonnées curvilignes de telle façon que

1) la limite du domaine opératoire soit constituée par des surfaces de coordonnées,

2) le passage aux coordonnées curvilignes rende possible la séparation des variables dans l'équation.

*Exemple.* Résolution de l'équation d'Helmholtz $\Delta u + k^2 u = 0$ par séparation des variables $\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right.$ est l'opérateur de Laplace$\Big)$. On connaît, pour l'équation proposée, onze systèmes de coordonnées curvilignes dans lesquelles les variables se séparent, donnant généralement naissance à des équations généralisées du type hypergéométrique.

A titre d'exemple, nous chercherons des solutions particulières de l'équation d'Helmholtz par séparation des variables en prenant les coordonnées cylindriques paraboliques et celles du paraboloïde de révolution *). On passe des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques paraboliques $\xi$, $\eta$, $\zeta$ à l'aide des formules

$$x = \xi\eta, \quad y = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2), \quad z = \zeta,$$

et aux coordonnées du paraboloïde de révolution $\xi, \eta$, $\varphi$ à l'aide des formules

$$x = \xi\eta \cos\varphi, \quad y = \xi\eta \sin\varphi, \quad z = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2).$$

Dans le premier cas l'équation d'Helmholtz $\Delta u + k^2 u = 0$ devient

$$\frac{1}{\xi^2 + \eta^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + k^2 u = 0, \tag{4}$$

---

*) Dans les manuels de mécanique quantique, les coordonnées du paraboloïde de révolution sont souvent appelées « coordonnées paraboliques ».

et dans le second cas,

$$\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\left[\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)+\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\right]+\frac{1}{(\xi\eta)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+k^2u=0. \quad (5)$$

Cherchons la solution de (4) par séparation des variables, en posant

$$u = U(\xi)\,V(\eta)\,W(\zeta). \quad (6)$$

Portons (6) dans l'équation. Il vient

$$\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\left[\frac{U''(\xi)}{U(\xi)}+\frac{V''(\eta)}{V(\eta)}\right]=-\left[\frac{W''(\zeta)}{W(\zeta)}+k^2\right].$$

Le premier membre de cette égalité est indépendant de $\zeta$, tandis que son second membre est indépendant de $\xi$ et de $\eta$. D'où

$$\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\left[\frac{U''(\xi)}{U(\xi)}+\frac{V''(\eta)}{V(\eta)}\right]=\lambda, \quad (7)$$

$$\frac{W''(\zeta)}{W(\zeta)}+k^2=-\lambda, \quad (8)$$

où $\lambda$ est une constante.

Ecrivant (7) sous la forme

$$\frac{U''(\xi)}{U(\xi)}-\lambda\xi^2=-\left[\frac{V''(\eta)}{V(\eta)}-\lambda\eta^2\right],$$

on obtient à l'aide d'un raisonnement analogue

$$\frac{U''(\xi)}{U(\xi)}-\lambda\xi^2=\mu, \qquad \frac{V''(\eta)}{V(\eta)}-\lambda\eta^2=-\mu,$$

où $\mu$ est une constante.

On aboutit finalement aux équations suivantes pour les fonctions $U(\xi)$, $V(\eta)$ et $W(\zeta)$:

$$U''-(\lambda\xi^2+\mu)\,U=0, \quad (9)$$

$$V''-(\lambda\mu^2-\mu)\,V=0, \quad (10)$$

$$W''+(k^2+\lambda)\,W=0. \quad (11)$$

D'une façon analogue, en cherchant la solution de (5) sous la forme

$$u = U(\xi)\,V(\eta)\,W(\varphi),$$

on aboutit aux équations suivantes pour les fonctions $U(\xi)$, $V(\eta)$ et $W(\varphi)$:

$$U''+\frac{1}{\xi}U'+\left(k^2\xi^2-\frac{\lambda}{\xi^2}+\mu\right)U=0, \quad (12)$$

$$V''+\frac{1}{\eta}V'+\left(k^2\eta^2-\frac{\lambda}{\eta^2}-\mu\right)V=0, \quad (13)$$

$$W''+\lambda W=0. \quad (14)$$

Les solutions de (11) et de (14) se laissent exprimer à l'aide de fonctions élémentaires. Par le changement de $\mu$ en $-\mu$ on réduit les équations (10) et (13) respectivement à (9) et à (12). Il reste donc à chercher les solutions des équations (9) et (12).

L'équation (9) est déjà une équation généralisée du type hypergéométrique. Dans l'équation (12), il est naturel de faire le changement $\xi^2 = t$ qui permet de la réduire à l'équation généralisée du type hypergéométrique

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dU}{dt} + \frac{1}{4t^2}(k^2t^2 + \mu t - \lambda)\, U = 0. \tag{15}$$

Les équations (9) et (15) se réduisent respectivement à une équation d'Hermite et à une équation hypergéométrique dégénérée (voir § 19) par la méthode exposée dans le § 1.

## § 24. Problèmes aux limites de physique mathématique

La résolution d'équations différentielles aux dérivées partielles par la méthode de séparation des variables exposée dans le § 23 se réduit à celle d'équations différentielles ordinaires. Dans bon nombre de problèmes intéressants de physique mathématique, les solutions de ces équations se laissent exprimer à l'aide des fonctions spéciales. Si l'on veut obtenir par cette méthode la solution d'une équation aux dérivées partielles dans le contexte d'un problème concret, on doit imposer aux solutions de l'équation considérée certaines restrictions visant à assurer l'unicité de la solution du problème. Ces restrictions en amènent d'autres, imposées aux solutions des équations différentielles ordinaires correspondantes, si bien qu'on se trouve finalement devant un problème dit aux limites. En étudiant les propriétés des solutions de problèmes aux limites arbitraires faisant intervenir les équations différentielles pour les fonctions spéciales, on arrive à dégager certaines propriétés intéressantes des fonctions spéciales. Considérons plus en détail la résolution des problèmes aux limites par séparation des variables.

**1. Résolution des problèmes aux limites par séparation des variables.** La méthode de séparation des variables décrite dans le § 23 s'applique largement à la résolution d'équations différentielles aux dérivées partielles qui se rencontrent en physique mathématique et sont de la forme

$$\rho(x, y, z)\left[A(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B(t)\frac{\partial u}{\partial t}\right] = Lu, \tag{1}$$

où

$$Lu = \operatorname{div}[k(x, y, z)\operatorname{grad} u] - q(x, y, z)\, u.$$

Si $A(t) = 1$, $B(t) = 0$, l'équation (1) définit la propagation d'oscillations, telles que les ondes électromagnétiques ou sonores; pour

$A(t) = 0$, $B(t) = 1$ l'équation (1) décrit des processus de transfert, tels que la propagation de la chaleur ou la diffusion de particules dans un milieu; pour $A(t) = 0$, $B(t) = 0$ l'équation (1) est celle des processus stationnaires.

La solution d'une équation aux dérivées partielles dépend généralement de fonctions arbitraires. Par exemple, la solution générale de l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = 0$ s'écrit $u(x, y) = f(x) + g(y)$, où $f$ et $g$ sont des fonctions différentiables quelconques. Des conditions supplémentaires s'imposent donc si l'on veut définir sans ambiguïté une solution de l'équation aux dérivées partielles qui traduit un processus physique concret. Les conditions supplémentaires les plus caractéristiques sont les conditions initiales et les conditions aux limites. Pour l'équation (1), donner les conditions initiales c'est donner les fonctions $u(x, y, z, t)$ et $\frac{\partial}{\partial t} u(x, y, z, t)$ pour $t = 0$. (Si $A(t) = 0$, il suffit de donner la fonction $u(x, y, z, t)|_{t=0}$.) Les conditions aux limites les plus simples s'écrivent

$$\left[\alpha(x, y, z)\, u + \beta(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial n}\right]\Big|_S = 0. \qquad (2)$$

Ici $\alpha(x, y, z)$ et $\beta(x, y, z)$ sont des fonctions; $S$ est la surface limitant le domaine dans lequel on cherche la solution de (1); $\partial u/\partial n$ est la dérivée suivant la normale extérieure à $S$. Le problème de recherche de la solution de (1) vérifiant les conditions initiales et les conditions aux limites imposées est appelé *problème aux limites.*

Considérons le schéma de résolution du problème aux limites par séparation des variables. La solution particulière de (1) répondant à la condition aux limites (2) peut être obtenue par séparation des variables, à condition de mettre la solution générale sous la forme

$$u(x, y, z, t) = T(t)\, v(x, y, z).$$

On obtient ainsi les équations suivantes:

$$A(t)\, T'' + B(t)\, T' + \lambda T = 0, \qquad (3)$$

$$Lv + \lambda \rho v = 0, \qquad (4)$$

où $\lambda$ est une constante. L'équation (3) est une équation différentielle ordinaire; dans les problèmes caractéristiques de physique mathématique, elle se prête facilement à la résolution analytique. En ce qui concerne l'équation (4), on aura recours à une condition aux limites consécutive à la condition (2):

$$\left[\alpha(x, y, z)\, v + \beta(x, y, z) \frac{\partial v}{\partial n}\right]\Big|_S = 0. \qquad (5)$$

Il s'agit donc finalement de chercher une solution non triviale de l'équation (4) pour la condition aux limites (5). La valeur de $\lambda$

pour laquelle le problème posé admet une solution non triviale (i.e. $v(x, y, z) \not\equiv 0$) est appelée *valeur propre*, et la fonction correspondante $v(x, y, z)$, *fonction propre*.

Dans les problèmes caractéristiques de physique mathématique, les fonctions propres et les valeurs propres peuvent être indicées. Soit $v_n(x, y, z)$ la fonction propre correspondant à la valeur propre $\lambda = \lambda_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Etant données l'équation (1), la condition aux limites (2) et les conditions initiales correspondantes, nous chercherons la solution sous la forme

$$u(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\, v_n(x, y, z),$$

où la fonction $T_n(t)$ est solution de (3) pour $\lambda = \lambda_n$. Pour que les conditions initiales soient satisfaites, il convient de choisir les valeurs des fonctions $T_n(t)$ et $T'_n(t)$ pour $t = 0$ de façon à vérifier les égalités

$$u(x, y, z\, t)|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(0)\, v_n(x, y, z),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, y, z, t)|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} T'_n(0)\, v_n(x, y, z).$$

Ainsi donc, pour résoudre le problème aux limites, il faut que, quelle que soit la fonction $u$ des variables $x$, $y$, $z$ (en l'occurrence $u|_{t=0}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}$), elle se laisse développer en série suivant les fonctions propres $v_n(x, y, z)$, i.e. que le système de fonctions propres $v_n(x, y, z)$ soit *complet* *).

Le problème devient tout à fait simple si l'on réussit à réduire le problème aux limites (4)-(5) par séparation des variables à des problèmes aux limites à une dimension, i.e. aux équations du type

$$Ly + \lambda \rho y = 0, \tag{6}$$

où

$$Ly = \frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)\, y \quad (k(x) > 0, \quad \rho(x) > 0).$$

---

*) La recherche de la solution sous la forme $\sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\, v_n(x, y, z)$ présente de l'intérêt non seulement dans le cas des équations du type (1) mais aussi pour des équations plus générales

$$\rho(x, y, z)\left[A(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B(t)\frac{\partial u}{\partial t}\right] = Lu + F(x, y, z, t)$$

(voir par exemple [5], [17]).

L'équation (6) est examinée sur l'intervalle $]a, b[$ pour des conditions aux limites du type

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) &= 0, \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) &= 0 \end{aligned} \qquad (7)$$

($\alpha_i$, $\beta_i$ étant des constantes données).

Un problème de ce type est appelé *problème de Sturm-Liouville.* Les fonctions $k(x)$, $k'(x)$, $q(x)$ et $\rho(x)$ seront supposées continues pour $x \in [a, b]$.

2. **Problème de Sturm-Liouville. Propriétés fondamentales des fonctions propres et des valeurs propres.** Considérons les propriétés fondamentales des solutions du problème de Sturm-Liouville. Les propriétés les plus élémentaires se déduisent à l'aide de l'égalité

$$\int_{x_1}^{x_2} (fLg - gLf)\, dx = k(x)\, W(f, g)\Big|_{x_1}^{x_2}, \qquad (8)$$

où

$$W(f, g) = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}$$

est le wronskien. Soient $y_1(x)$, $y_2(x)$ deux solutions du problème de Sturm-Liouville répondant aux valeurs propres $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Puisqu'on a en vertu de (7)

$$\begin{aligned} \alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a) &= 0, \\ \alpha_1 y_2(a) + \beta_1 y_2'(a) &= 0, \end{aligned}$$

nous remarquons que, considérées comme un système d'équations linéaires homogènes relativement aux constantes $\alpha_1$ et $\beta_1$, ces égalités n'admettent des solutions non triviales que si le déterminant du système, i. e. le wronskien $W(y_1, y_2)$ pour $x = a$, est nul. On montre de même que $W(y_1, y_2)\,|_{x=b} = 0$. On déduit donc de l'identité (8), pour $x_1 = a$, $x_2 = b$, $f(x) = y_1(x)$, $g(x) = y_2(x)$, que

$$\int_a^b (y_1 Ly_2 - y_2 Ly_1)\, dx = 0.$$

En vertu de l'équation (6) et de la condition $\lambda_1 \neq \lambda_2$, cette égalité peut s'écrire aussi comme suit:

$$\int_a^b y_1(x)\, y_2(x)\, \rho(x)\, dx = 0 \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2). \qquad (9)$$

Ainsi donc, *les fonctions propres du problème de Sturm-Liouville* (6)-(7) *correspondant à des valeurs propres différentes sont orthogonales sur l'intervalle* $]a, b[$ *par rapport au poids* $\rho(x)$.

Compte tenu de cette propriété, on montre sans peine que *les valeurs propres du problème de Sturm-Liouville sont réelles*, pour autant que les coefficients de l'équation (6) et les constantes $\alpha_i$, $\beta_i$ des conditions (7) soient réels. Supposons en effet qu'il existe une fonction propre $y(x)$ du problème de Sturm-Liouville qui correspond à une valeur propre $\lambda$ complexe. Passant aux conjuguées complexes dans (6) et (7), on s'assure facilement que la fonction $y^*(x)$ est la fonction propre répondant à la valeur propre $\lambda^*$. Posant $\lambda \neq \lambda^*$, on aurait alors en vertu de l'égalité (9)

$$\int_a^b |y(x)|^2 \rho(x)\, dx = 0,$$

ce qui est impossible, car $\rho(x) > 0$ et $y(x) \not\equiv 0$.

Dans de nombreux problèmes de physique, on a souvent à chercher les fonctions propres et les valeurs propres d'un problème aux limites au cas où les coefficients de l'équation (5) admettent une singularité pour $x \to a$ ($k(x) \to 0$ ou $q(x) \to \infty$, etc.). Dans ce cas également, toutes les propriétés évoquées des fonctions propres et des valeurs propres du problème de Sturm-Liouville sont conservées pour des conditions assez générales imposées au comportement des coefficients de l'équation (6) pour $x \to a$. Au lieu de la première des conditions aux limites (7), on demande souvent que la solution du problème de Sturm-Liouville soit bornée pour $x \to a$.

Si l'équation est exempte de singularités, les fonctions propres du problème de Sturm-Liouville se déduisent à partir des conditions aux limites homogènes du type (7) tant pour $x = a$ que pour $x = b$. Les fonctions propres sont orthogonales et les valeurs propres réelles pour la raison que l'opérateur $L$ est auto-adjoint dans la classe des fonctions admettant une dérivée seconde continue sur l'intervalle $]a, b[$ :

$$\int_a^b (fLg - gLf)\, dx = 0.$$

On a en vertu de (8)

$$\int_a^b (fLg - gLf)\, dx = k(x)\, W(f, g)\big|_a^b.$$

Si les fonctions $f$ et $g$ vérifient les conditions aux limites homogènes tant pour $x = a$ que pour $x = b$, l'opérateur $L$ est auto-adjoint, car

$$W(f, g) = (fg' - gf')\big|_{x=a,b} = 0.$$

Soit maintenant $x = a$ un point singulier de l'équation. Les propriétés que possèdent les fonctions propres et les valeurs propres du problème de Sturm-Liouville en l'absence de points singuliers seront alors, de toute évidence, conservées pour une équation admettant un point singulier si, la solution étant bornée pour $x = a$, on a

$$k(x)(fg' - gf')\,|_{x=a} = 0.$$

Les valeurs propres et les fonctions propres du problème de Sturm-Liouville peuvent être classées en faisant appel aux propriétés oscillatoires des solutions de ce problème.

**3. Propriétés oscillatoires des solutions du problème de Sturm-Liouville.** Soit l'équation

$$[k(x)\,y']' + g(x)\,y = 0. \tag{10}$$

Pour étudier les propriétés oscillatoires de ses solutions pour $k(x) > 0$ faisons le changement de variables

$$y = r(x)\sin\varphi(x), \quad ky' = r(x)\cos\varphi(x). \tag{11}$$

Nous obtenons les équations pour les fonctions inconnues $r(x)$ et $\varphi(x)$ :

$$k(x)\,y' = k(x)(r'\sin\varphi + r\,\varphi'\cos\varphi) = r\cos\varphi,$$
$$g(x)\,y = -[k(x)\,y']' = -r'\cos\varphi + r\varphi'\sin\varphi = gr\sin\varphi,$$

d'où

$$r'\sin\varphi + r\varphi'\cos\varphi = \frac{r}{k}\cos\varphi,$$
$$-r'\cos\varphi + r\varphi'\sin\varphi = gr\sin\varphi.$$

Explicitant $\varphi'$ et $r'$, on obtient à partir de ce système deux équations différentielles :

$$\varphi' = \frac{1}{k(x)}\cos^2\varphi + g(x)\sin^2\varphi, \tag{12}$$
$$r' = \frac{1}{2}\,r\left(\frac{1}{k} - g\right)\sin 2\varphi.$$

De la dernière équation on tire

$$r(x) = r(x_0)\exp\left\{\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\left[\frac{1}{k(t)} - g(t)\right]\sin 2\varphi(t)\,dt\right\},$$

d'où il ressort que la fonction $r(x)$ reste de signe constant. On voit donc que c'est le signe de $\sin\varphi(x)$, $\cos\varphi(x)$ qui détermine celui de $y(x)$, $y'(x)$ ; par conséquent, pour connaître les propriétés oscillatoires des solutions de (10), il suffit d'examiner le comportement de la solution de l'équation (12).

THÉORÈME 1 (THÉORÈME DE COMPARAISON). *Soient* $\varphi(x)$, $\bar{\varphi}(x)$ *solutions des équations*

$$\varphi' = \frac{1}{k(x)}\cos^2\varphi + g(x)\sin^2\varphi,$$

$$\bar{\varphi}' = \frac{1}{\bar{k}(x)}\cos^2\bar{\varphi} + \bar{g}(x)\sin^2\bar{\varphi},$$

*et soit* $\bar{\varphi}(x_0) = \varphi(x_0)$. *Si* $\frac{1}{\bar{k}(x)} \geqslant \frac{1}{k(x)}$, $\bar{g}(x) \geqslant g(x)$, *on a*

$$\bar{\varphi}(x) \geqslant \varphi(x) \text{ pour } x > x_0,$$

$$\bar{\varphi}(x) \leqslant \varphi(x) \text{ pour } x < x_0.$$

Démonstration. Posons

$$\frac{1}{k_\nu(x)} = \frac{1}{k(x)} + \nu\left[\frac{1}{\bar{k}(x)} - \frac{1}{k(x)}\right],$$

$$g_\nu(x) = g(x) + \nu[\bar{g}(x) - g(x)],$$

où $\nu$ est un paramètre qui parcourt les valeurs entre $\nu = 0$ et $\nu = 1$. Considérons l'équation

$$\varphi_\nu' = \frac{1}{k_\nu(x)}\cos^2\varphi_\nu + g_\nu(x)\sin^2\varphi_\nu \tag{13}$$

soumise à la condition initiale $\varphi_\nu(x_0) = \varphi(x_0)$. Puisque $k_0(x) = k(x)$, $k_1(x) = \bar{k}(x)$, $g_0(x) = g(x)$, $g_1(x) = \bar{g}(x)$, on a $\varphi_0(x) = \varphi(x)$, $\varphi_1(x) = \bar{\varphi}(x)$. Soit $\psi_\nu(x) = \partial\psi_\nu(x)/\partial\nu$. Il vient en vertu de (13)

$$\psi_\nu' = a_\nu(x)\,\psi_\nu + b_\nu(x), \quad \psi_\nu(x_0) = 0,$$

où

$$a_\nu = (g_\nu - 1/k_\nu)\sin 2\varphi_\nu,$$

$$b_\nu = (1/\bar{k} - 1/k)\cos^2\varphi_\nu + (\bar{g} - g)\sin^2\varphi_\nu.$$

Il est évident que $b_\nu(x) \geqslant 0$. La solution de l'équation linéaire non homogène pour $\psi_\nu(x)$ s'écrit sous la forme

$$\psi_\nu(x) = \int_{x_0}^{x} b_\nu(t)\exp\left[\int_t^x a_\nu(s)\,ds\right]dt.$$

Il ressort de cette expression qu'on a $\psi_\nu(x) \geqslant 0$ pour $x > x_0$ et que $\psi_\nu(x) \leqslant 0$ pour $x < x_0$. La proposition résulte de l'égalité évidente

$$\bar{\varphi}(x) - \varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_0(x) = \int_0^1 \frac{\partial\varphi_\nu(x)}{\partial\nu}\,d\nu = \int_0^1 \psi_\nu(x)\,d\nu.$$

Le théorème est démontré. ■

*Remarque*. Si dans une des conditions du théorème on a une inégalité stricte sur une partie de l'intervalle ] $x_0$, $x$ [, l'assertion correspondante est elle aussi une inégalité stricte. Cela ressort du fait que $b_\nu(t) > 0$ sur la partie considérée de l'intervalle ] $x_0$, $x$ [.

Indiquons encore une propriété de la fonction $\varphi(x)$. Remarquant que $\varphi'(x) > 0$ aux points où $\varphi(x) = \pi n$ ($n = 0, \pm 1, \ldots$), on doit avoir $\varphi(x) > \pi n$ si $\varphi(x_0) \geqslant \pi n$ pour $x > x_0$. Dans le cas contraire il existe un point $x_1 > x_0$ tel que $\varphi(x_1) = \pi n$, $\varphi'(x_1) \leqslant 0$, ce qui est impossible. En particulier, si $\varphi(x_0) \geqslant 0$, on a $\varphi(x) > 0$ pour $x > x_0$.

En vertu de la représentation $y = r \sin \varphi$, la fonction $y(x)$ admet autant de zéros sur l'intervalle ] $a$, $b$ [ qu'il y a de points en lesquels $\varphi(x) = \pi n$ sur ce même intervalle. De la propriété qu'on vient d'examiner, il ressort que le nombre des zéros de la fonction $y(x)$ est égal au nombre des entiers compris entre $\varphi(a)/\pi$ et $\varphi(b)/\pi$.

Considérons à présent les propriétés oscillatoires des solutions du problème de Sturm-Liouville

$$\begin{gathered}[k(x)\, y']' + g(x, \lambda)\, y = 0, \quad g(x, \lambda) = \lambda \rho(x) - q(x), \\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \\ k(x) > 0 \text{ et } \rho(x) > 0 \text{ pour } x \in [a, b]. \end{gathered} \tag{14}$$

Faisant le changement $y = r \sin \varphi$, $ky' = r \cos \varphi$, on obtient l'équation suivante pour $\varphi(x)$:

$$\varphi' = \frac{1}{k(x)} \cos^2 \varphi + g(x, \lambda) \sin^2 \varphi.$$

Compte tenu de (11), mettons les conditions aux limites (14) sous la forme

$$\begin{gathered}\operatorname{cotg} \varphi(a) = -\alpha_1 k(a)/\beta_1, \\ \operatorname{cotg} \varphi(b) = -\alpha_2 k(b)/\beta_2.\end{gathered}$$

La première condition sera satisfaite en posant

$$\varphi(a) = \operatorname{arc\,cotg}\left(-\frac{\alpha_1 k(a)}{\beta_1}\right)$$

(pour $\beta_1 = 0$ on posera $\varphi(a) = 0$). On a alors $0 \leqslant \varphi(a) < \pi$ et donc $\varphi(b) > 0$.

La seconde condition aux limites sert à définir les valeurs propres $\lambda$:

$$\varphi(b) \equiv \varphi(b, \lambda) = \operatorname{arc\,cotg}\left(-\frac{\alpha_2 k(b)}{\beta_2}\right) + \pi n,$$

où $n$ est un entier non négatif (pour $\beta_2 = 0$ on posera $\operatorname{arc\,cotg}\left(-\frac{\alpha_2 k(b)}{\beta_2}\right) = \pi$).

THÉORÈME 2 (THÉORÈME D'OSCILLATION). *Le problème de Sturm-Liouville admet une infinité de valeurs propres* $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ *Les fonctions propres correspondant à une valeur propre* $\lambda = \lambda_n$ *admettent exactement* $n$ *zéros sur l'intervalle* $]\, a, b\, [$.

Démonstration. Soit $\lambda = \lambda_n$ racine de l'équation

$$\varphi(b, \lambda) = \operatorname{arc\,cotg}\left(-\frac{\alpha_2 k(b)}{\beta_2}\right) + \pi n \tag{15}$$

dans laquelle $n$ est un entier non négatif. Puisque $0 \leqslant \varphi(a) < \pi$, $\pi n < \varphi(b, \lambda_n) \leqslant \pi(n+1)$, l'intervalle $]\, a, b\, [$ comporte exactement $n$ entiers entre les nombres $\varphi(a)/\pi$ et $\varphi(b, \lambda_n)/\pi$. Comme on l'a montré plus haut, cela revient à dire que la fonction $y(x) = r(x) \sin \varphi(x)$ correspondant à la valeur propre $\lambda = \lambda_n$ admet exactement $n$ zéros sur l'intervalle $]\, a, b\, [$.

Montrons maintenant que l'équation (15) admet exactement une racine pour tout $n = 0, 1, \ldots$ donné. Puisque la fonction $g(x, \lambda) = \lambda\rho(x) - q(x)$ croît avec l'augmentation de $\lambda$ et la fonction $\varphi(a)$ est indépendante de $\lambda$, on constate en vertu du théorème démontré ci-dessus que la quantité $\varphi(x) = \varphi(x, \lambda)$ est une fonction monotone croissante de $\lambda$ pour une valeur donnée de $x > a$. Aussi, pour $n$ donné, l'équation (15) ne peut-elle avoir qu'une seule racine $\lambda = \lambda_n$, et $\lambda_{n+1} > \lambda_n$. Toutes les valeurs propres peuvent donc être indicées par $n = 0, 1, 2, \ldots$

Pour montrer que l'équation (15) n'admet qu'une seule racine pour chaque $n = 0, 1, \ldots$, il suffit de prouver que

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \varphi(b, \lambda) = 0, \qquad \lim_{\lambda \to +\infty} \varphi(b, \lambda) = +\infty. \tag{16}$$

Appliquons le théorème de comparaison. Remplaçons, dans le problème de Sturm-Liouville, les fonctions $k(x)$ et $g(x, \lambda)$ par des constantes $\bar{k}$, $\bar{g}(\lambda)$ et $\tilde{k}$, $\tilde{g}(\lambda)$ respectivement, telles que

$$\frac{1}{\bar{k}} \leqslant \frac{1}{k(x)} \leqslant \frac{1}{\tilde{k}}, \quad \bar{g}(\lambda) \leqslant g(x, \lambda) \leqslant \tilde{g}(\lambda).$$

On obtient ainsi trois équations pour les fonctions correspondantes $\varphi(x)$, $\bar{\varphi}(x)$ et $\tilde{\varphi}(x)$:

$$\varphi' = \frac{1}{k(x)} \cos^2 \varphi + g(x, \lambda) \sin^2 \varphi,$$

$$\bar{\varphi}' = \frac{1}{\bar{k}} \cos^2 \bar{\varphi} + \bar{g}(\lambda) \sin^2 \bar{\varphi},$$

$$\tilde{\varphi}' = \frac{1}{\tilde{k}} \cos^2 \tilde{\varphi} + \tilde{g}(\lambda) \sin^2 \tilde{\varphi}.$$

Remplaçons, dans les conditions aux limites (14), les constantes $\alpha_1$, $\beta_1$ respectivement par des constantes $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\beta}_1$ et $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\beta}_1$ telles que

$\varphi(a) = \bar{\varphi}(a) = \tilde{\varphi}(a)$ *). On aura alors pour $x > a$, en vertu du théorème de comparaison, les inégalités

$$\bar{\varphi}(x, \lambda) \leqslant \varphi(x, \lambda) \leqslant \tilde{\varphi}(x, \lambda)$$

et en particulier

$$\bar{\varphi}(b, \lambda) \leqslant \varphi(b, \lambda) \leqslant \tilde{\varphi}(b, \lambda).$$

Les relations limites (16) résulteront donc des relations analogues pour $\bar{\varphi}(b, \lambda)$ et $\tilde{\varphi}(b, \lambda)$.

Pour définir les fonctions $\bar{\varphi}(x, \lambda)$ et $\tilde{\varphi}(x, \lambda)$, il nous faudra résoudre les équations suivantes par rapport à $\bar{y}(x, \lambda)$ et $\tilde{y}(x, \lambda)$:

$$\bar{y}'' + \frac{\bar{g}(\lambda)}{\bar{k}} \bar{y} = 0, \tag{17}$$

$$\tilde{y}'' + \frac{\tilde{g}(\lambda)}{\tilde{k}} \tilde{y} = 0. \tag{18}$$

Comme $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} g(x, \lambda) = -\infty$ et $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} g(x, \lambda) = +\infty$, nous admettrons que des relations analogues ont lieu aussi pour les fonctions $\bar{g}(\lambda)$ et $\tilde{g}(\lambda)$. Montrons que $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \bar{\varphi}(b, \lambda) = 0$ et $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \tilde{\varphi}(b, \lambda) = 0$. La solution de l'équation (17) vérifiant la condition $\bar{\alpha}_1 \bar{y}(a) + \bar{\beta}_1 \bar{y}'(a) = 0$ se présente comme suit:

$$\bar{y}(x, \lambda) = \begin{cases} A\left[\dfrac{\bar{\alpha}_1}{\omega} \operatorname{sh} \omega(x-a) - \bar{\beta}_1 \operatorname{ch} \omega(x-a)\right] & \text{pour } \bar{g}(\lambda) < 0, \\ A \sin[\omega(x-a) + \varphi_0] & \text{pour } \bar{g}(\lambda) > 0, \end{cases}$$

où

$$\omega = \sqrt{\left|\frac{\bar{g}}{\bar{k}}\right|}, \quad \bar{\alpha}_1 \sin\varphi_0 + \bar{\beta}_1 \omega \cos\varphi_0 = 0.$$

*) Cette condition est remplie si l'on a

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} k(a) = \frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\beta}_1} \bar{k} = \frac{\tilde{\alpha}_1}{\tilde{\beta}_1} \tilde{k}.$$

La fonction $\bar{y}(x, \lambda)$ n'admet pas de zéros pour $x > a$ si $\bar{g}(\lambda) \to -\infty$, car on a alors

$$\bar{y}(x, \lambda) \approx \begin{cases} -A\,\bar{\beta}_1 \operatorname{ch} \omega(x-a) & \text{pour } \bar{\beta}_1 \neq 0, \\ A\dfrac{\bar{\alpha}_1}{\omega} \operatorname{sh} \omega(x-a) & \text{pour } \bar{\beta}_1 = 0. \end{cases}$$

Cela signifie qu'on a $0 < \bar{\varphi}(x, \lambda) < \pi$ pour $x > a$ si $\lambda$ est un nombre négatif suffisamment grand en module. On a en outre, de toute évidence,

$$\operatorname{cotg} \bar{\varphi}(x, \lambda) = \bar{k}\,\frac{\bar{y}'(x, \lambda)}{\bar{y}(x, \lambda)} \xrightarrow[\lambda \to -\infty]{} +\infty.$$

Cela revient à dire que $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \bar{\varphi}(x, \lambda) = 0$.

Soit maintenant $\lambda \to +\infty$. La forme explicite de $\bar{y}(x, \lambda)$ montre alors que cette fonction peut admettre autant de zéros que l'on veut sur l'intervalle $]\,a, b\,[$, i.e. $\bar{\varphi}(b, \lambda) \geqslant \pi n$ pour tout $n > 0$, à condition que $\lambda$ prenne une valeur positive suffisamment élevée. On a donc $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \bar{\varphi}(b, \lambda) = +\infty$.

Nous avons démontré les relations limites pour la fonction $\bar{\varphi}(x, \lambda)$. Pour $\tilde{\varphi}(x, \lambda)$, elles se démontrent d'une façon analogue. Puisque

$$\bar{\varphi}(x, \lambda) \leqslant \varphi(x, \lambda) \leqslant \tilde{\varphi}(x, \lambda),$$

on a $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \varphi(b, \lambda) = 0$, $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \varphi(b, \lambda) = +\infty$. Le théorème est démontré. ■

Le raisonnement développé dans la démonstration du théorème permet de donner une évaluation bien simple des valeurs propres $\lambda$. Supposons que $\bar{\lambda}_n$ et $\tilde{\lambda}_n$ correspondent aux fonctions $\bar{k}(x)$, $\bar{g}(x, \lambda)$ et $\tilde{k}(x)$, $\tilde{g}(x, \lambda)$ et que

$$\frac{1}{\bar{k}(x)} \leqslant \frac{1}{k(x)} \leqslant \frac{1}{\tilde{k}(x)}, \quad \bar{g}(x, \lambda) \leqslant g(x, \lambda) \leqslant \tilde{g}(x, \lambda),$$

$$\frac{\alpha_1 k(a)}{\beta_1} = \frac{\bar{\alpha}_1 \bar{k}(a)}{\bar{\beta}_1} = \frac{\tilde{\alpha}_1 \tilde{k}(a)}{\tilde{\beta}_1},$$

$$\frac{\alpha_2 k(b)}{\beta_2} = \frac{\bar{\alpha}_2 \bar{k}(b)}{\bar{\beta}_2} = \frac{\tilde{\alpha}_2 \tilde{k}(b)}{\tilde{\beta}_2},$$

où $\alpha_i$, $\beta_i$, $\bar{\alpha}_i$, $\bar{\beta}_i$, $\tilde{\alpha}_i$, $\tilde{\beta}_i$ sont des constantes figurant dans des conditions aux limites du type (14).

Puisque $\bar{\varphi}(a) = \varphi(a) = \tilde{\varphi}(a)$, on a en vertu du théorème de comparaison $\bar{\varphi}(b, \lambda) \leqslant \varphi(b, \lambda) \leqslant \tilde{\varphi}(b, \lambda)$. D'autre part, on a

$$\varphi(b, \lambda_n) = \operatorname{arc\,cotg}\left(-\frac{\alpha_2 k(b)}{\beta_2}\right) + \pi n,$$

$$\bar{\varphi}(b, \bar{\lambda}_n) = \operatorname{arc\,cotg}\left(-\frac{\bar{\alpha}_2 \bar{k}(b)}{\bar{\beta}_2}\right) + \pi n,$$

$$\tilde{\varphi}(b, \tilde{\lambda}_n) = \operatorname{arc\,cotg}\left(-\frac{\tilde{\alpha}_2 \tilde{k}(b)}{\tilde{\beta}_2}\right) + \pi n,$$

d'où $\varphi(b, \lambda_n) = \bar{\varphi}(b, \bar{\lambda}_n) = \tilde{\varphi}(b, \tilde{\lambda}_n)$. Donc, puisque les fonctions $\varphi(b, \lambda)$, $\bar{\varphi}(b, \lambda)$ et $\tilde{\varphi}(b, \lambda)$ croissent de façon monotone avec l'augmentation de $\lambda$, on a $\tilde{\lambda}_n \leqslant \lambda_n \leqslant \bar{\lambda}_n$.

Dans le cas très important pour les applications où $\alpha_1\beta_1 \leqslant 0$, $\alpha_2\beta_2 \geqslant 0$ on peut très facilement minorer les valeurs propres en procédant comme suit. Multiplions l'équation

$$[k(x) y']' + [\lambda\rho(x) - q(x)] y = 0$$

par $y(x)$ et intégrons-la de $x = a$ à $x = b$. Il vient

$$\lambda = -\frac{\int_a^b yLy\,dx}{\int_a^b y^2\rho\,dx} = \frac{\int_a^b qy^2\,dx - \int_a^b y\frac{d}{dx}\left(k\frac{dy}{dx}\right)dx}{\int_a^b y^2\rho\,dx}.$$

D'autre part,

$$-\int_a^b y\frac{d}{dx}\left(k\frac{dy}{dx}\right)dx = -kyy'\Big|_a^b + \int_a^b k\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx.$$

Afin d'évaluer le terme $-kyy'$, nous ferons intervenir les conditions aux limites (14) en multipliant la première condition par $(\alpha_1 y' + \beta_1 y)\,|_{x=a}$ et la seconde par $(\alpha_2 y' + \beta_2 y)\,|_{x=b}$. Il vient alors

$$yy'\,|_{x=a} = -\frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_1^2+\beta_1^2}(y^2 + y'^2)\,|_{x=a} \geqslant 0,$$

$$yy'\,|_{x=b} = -\frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}(y^2 + y'^2)\,|_{x=b} \leqslant 0.$$

On a donc

$$-\int_a^b y\frac{d}{dx}\left(k\frac{dy}{dx}\right)dx \geqslant 0,$$

d'où il ressort que

$$\lambda \geqslant \int_a^b qy^2\,dx \Big/ \int_a^b y^2\rho\,dx.$$

Puisque $\rho(x) > 0$, on a en vertu du théorème de la moyenne

$$\int_a^b qy^2\,dx = \left(\frac{q}{\rho}\right)\Big|_{x=x^*} \int_a^b y^2\rho\,dx, \quad x^* \in ]a,\ b[.$$

On a donc

$$\lambda \geqslant \min_{x\in ]a,\ b[} \frac{q(x)}{\rho(x)}. \tag{19}$$

Dans le cas où les fonctions propres $y(x) \neq$ const, on a une inégalité stricte, car

$$\int_a^b k\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx > 0.$$

**4. Développement des fonctions suivant les fonctions propres du problème de Sturm-Liouville.** Dans les problèmes aux limites de physique mathématique, on a souvent recours aux *développements des fonctions suivant les fonctions propres du problème de Sturm-Liouville*:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y_n(x). \tag{20}$$

Ici $y_n(x)$ est la fonction propre répondant à la valeur propre $\lambda = \lambda_n$. Les coefficients $a_n$ se cherchent en faisant intervenir la propriété d'orthogonalité des fonctions propres:

$$a_n = \int_a^b f(x)\,y_n(x)\,\rho(x)\,dx \Big/ \int_a^b y_n^2(x)\,\rho(x)\,dx. \tag{21}$$

Dans le cas particulier du problème de Sturm-Liouville où $k(x) = 1$, $\rho(x) = 1$, $q(x) = 0$ et $\beta_1 = \beta_2 = 0$, les fonctions propres $y_n(x)$ s'écrivent

$$y_n(x) = A_n \sin\frac{\pi n}{l}(x-a), \quad \lambda = \sqrt{\frac{\pi n}{l}},$$

et pour $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ elles deviennent

$$y_n(x) = B_n \cos\frac{\pi n}{l}(x-a), \quad \lambda_n = \sqrt{\frac{\pi n}{l}} \quad (l = b-a).$$

Dans ces cas le développement (20) représente un développement bien connu en série de Fourier suivant les sinus ou les cosinus respectivement.

Dans le cas général, les conditions de légitimité du développement (20) se laissent réduire aux conditions de développabilité de la fonction en série de Fourier par la même méthode qui a été indiquée dans le § 8 pour les polynômes orthogonaux classiques (voir le théorème de convergence simultanée).

**5. Problèmes aux limites pour l'équation de Bessel.** A titre d'exemple de problèmes aux limites de physique mathématique qu'on résout généralement par séparation des variables nous allons considérer l'équation de la chaleur

$$\partial u/\partial t = a^2 \Delta u$$

dans un cylindre illimité $r < r_0$ pour des conditions aux limites

$$(\alpha u + \beta \partial u/\partial r) \mid_{r=r_0} = 0 \tag{22}$$

et des conditions initiales indépendantes de la distance mesurée parallèlement à l'axe du cylindre ($\alpha$, $\beta$ sont des constantes).

En coordonnées cylindriques, il est naturel de poser $u = u(r, \varphi, t)$. Cherchons une solution particulière du problème par la méthode de séparation des variables; posons

$$u = T(t) R(r) \Phi(\varphi).$$

Portons cette expression dans l'équation de la chaleur

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2};$$

il vient

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T} = \frac{1}{rR}(rR')' + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda.$$

Ici $\lambda$ est une constante, car le premier membre de l'égalité est indépendant de $r$ et de $\varphi$, et le second membre, de $t$. L'équation pour la fonction $T(t)$ s'écrit

$$T(t) = e^{-\lambda a^2 t}.$$

Il vient ensuite

$$\frac{r}{R}(rR')' + \lambda r^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu \qquad (\mu = \text{const}).$$

Explicitons $\Phi(\varphi)$ :

$$\Phi(\varphi) = A \cos\sqrt{\mu}\,\varphi + B \sin\sqrt{\mu}\,\varphi.$$

Puisque, d'après sa signification physique, la fonction $u(r, \varphi, t)$ doit être univoque, la fonction $\Phi(\varphi)$ doit être périodique:

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi),$$

d'où $\mu = n^2$, $n = 0, 1, \ldots$ Aussi la fonction $R(t)$ doit-elle vérifier l'équation

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2}\right) R = 0 \tag{23}$$

qui est un cas particulier de l'équation de Lommel (4) du § 13. D'après sa signification physique, la fonction $u(r, \varphi, t)$ doit être bornée pour $r \leqslant r_0$ et en particulier pour $r \to 0$. On a donc, à un facteur près,

$$R(r) = J_n(\sqrt{\lambda}\, r)$$

En vertu de (22), la fonction $R(r)$ doit vérifier la condition aux limites

$$[\alpha R(r) + \beta R'(r)] \mid_{r=r_0} = 0, \tag{24}$$

d'où l'on déduit l'équation définissant les valeurs possibles de la constante $\lambda$:

$$\alpha J_n(z) + \gamma z J_n'(z) = 0. \tag{25}$$

Ici

$$z = \sqrt{\lambda}\, r_0, \qquad \gamma = \beta / r_0.$$

Mettons la solution générale du problème proposé sous forme de superposition des solutions particulières obtenues:

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda_{nm} a^2 t} (A_{nm} \cos n\varphi + B_{nm} \sin n\varphi) J_n(\sqrt{\lambda_{nm}}\, r)$$

(en sommant suivant toutes les différentes valeurs propres $\lambda$).

Les constantes $A_{nm}$ et $B_{nm}$ se cherchent en faisant intervenir les conditions initiales et les propriétés d'orthogonalité des fonctions propres.

Une généralisation naturelle du problème (23)-(24) est le problème de recherche des fonctions propres et des valeurs propres de l'équation

$$\frac{d}{dx}\left(x \frac{dy}{dx}\right) + \left(\lambda x - \frac{\nu^2}{x}\right) y = 0 \quad (\nu \geqslant 0) \tag{26}$$

assujettie à la condition aux limites $[\alpha y(x) + \beta y'(x)] \mid_{x=l} = 0$ et à la condition d'admettre une solution bornée pour $x \to 0$. Dans le voisinage du point $x = 0$, pour des valeurs données de $\lambda$ et $\nu \geqslant 0$, une seule des deux solutions linéairement indépendantes de (26) est bornée:

$$y_\lambda(x) = J_\nu(sx) \quad (s = \sqrt{\lambda}).$$

L'équation (26) admet une singularité pour $x \to 0$. Pour que les propriétés fondamentales des fonctions propres et des valeurs propres du problème de Sturm-Liouville soient conservées dans le cas

de (26), on doit s'assurer que $k(x)\,W[y_{\lambda_1}(x),\ y_{\lambda_2}(x)] \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Développons la fonction $J_\nu(sx)$ en série de puissances. Il vient

$$k(x)\,W[y_{\lambda_1}(x),\ y_{\lambda_2}(x)] =$$

$$= x\left[J_\nu(s_1x)\frac{d}{dx}J_\nu(s_2x) - J_\nu(s_2x)\frac{d}{dx}J_\nu(s_1x)\right] =$$

$$= x\left\{\frac{1}{2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1)}\left[(s_1x)^\nu \nu s_2(s_2x)^{\nu-1} - (s_2x)^\nu \nu s_1(s_1x)^{\nu-1}\right] + O(x^{2\nu+1})\right\} = O(x^{2\nu+2}) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Nous sommes amenés à énoncer les conclusions suivantes:

1) *Les fonctions propres du problème posé sont*

$$y_{\nu n}(x) = J_\nu(\sqrt{\lambda_{\nu n}}\,x) \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots);$$

*ses valeurs propres sont définies par l'équation*

$$\alpha J_\nu(z) + \gamma z J'_\nu(z) = 0 \tag{27}$$

*dans laquelle* $z = \sqrt{\lambda}\,l$, $\gamma = \beta/l$.

Si $\alpha/\gamma + \nu < 0$, l'équation (27) admet une racine qui correspond à la valeur propre $\lambda < 0$. Si tel est le cas, on doit remplacer, dans tous les calculs suivants, $\sqrt{\lambda}$ et $J_\nu(\sqrt{\lambda}\,x)$ par $i\sqrt{-\lambda}$ et $e^{i\pi\nu/2}I_\nu(\sqrt{-\lambda}\,x)$ respectivement.

2) *Les fonctions propres* $J_\nu(\sqrt{\lambda_{\nu n}}\,x)$ *sont orthogonales sur l'intervalle* $]0,\ l[$ *par rapport au poids* $\rho(x) = x$, *i.e.*

$$\int_0^l J_\nu(\sqrt{\lambda_{\nu n}}\,x)\,J_\nu(\sqrt{\lambda_{\nu m}}\,x)\,x\,dx = 0 \quad (m \neq n).$$

Pour calculer le carré de la norme des fonctions propres, nous utiliserons l'égalité

$$\int_0^l y_\lambda(x)\,y_\mu(x)\,\rho(x)\,dx = \frac{1}{\lambda-\mu}\,k(x)\,W[y_\lambda(x),\ y_\mu(x)]\Big|_0^l =$$

$$= \frac{1}{\lambda-\mu}\,W[y_\lambda(x),\ y_\mu(x)]\Big|_{x=l} \tag{28}$$

(nous avons utilisé une identité analogue en démontrant l'orthogonalité des fonctions propres du problème de Sturm-Liouville).

Passant dans (28) à la limite pour $\mu \to \lambda$ et levant l'indétermination par la règle de L'Hospital, nous obtenons

$$\int_0^l y_\lambda^2(x)\,\rho(x)\,dx = k(x)\,W\left(\frac{\partial y_\lambda}{\partial\lambda},\ y_\lambda\right)\Big|_{x=l},$$

d'où

$$N_{\nu n}^2 = \int_0^l x J_\nu^2 (\sqrt{\lambda_{\nu n}}\, x)\, dx = \frac{x}{2\sqrt{\lambda}} W\left(x J_\nu' (\sqrt{\lambda}\, x),\quad J_\nu(\sqrt{\lambda}\, x)\right)\Big|_{\substack{x=l \\ \lambda=\lambda_{\nu n}}}$$

(en prenant la dérivée par rapport à l'argument de la fonction de Bessel). Le wronskien se calcule sans peine en exprimant la dérivée seconde au moyen de la première et de la fonction elle-même à l'aide de l'équation de Bessel. Il vient

$$N_{\nu n}^2 = \frac{l^2}{2} \left\{ [J_\nu'(z)]^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) J_\nu^2(z) \right\} \Big|_{z=\sqrt{\lambda_{\nu n}}\, l}. \tag{29}$$

L'équation (26) admet une singularité pour $x \to 0$. On montre cependant que le théorème d'oscillation reste valable pour le problème considéré, si bien que l'équation (27) admet une infinité de racines $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ et les fonctions propres $y_\lambda(x)$ correspondant à la valeur propre $\lambda = \lambda_{\nu n}$ admettent exactement $n$ zéros dans l'intervalle $]0, l[$. En vertu du théorème de comparaison, les valeurs propres $\lambda = \lambda_{\nu n}$ croissent avec $\lambda$.

**6. Développements de Dini et de Fourier-Bessel. Intégrale de Fourier-Bessel.** Le développement

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\nu n} J_\nu (\sqrt{\lambda_{\nu n}}\, x), \tag{30}$$

où

$$a_{\nu n} = \frac{1}{N_{\nu n}^2} \int_0^l x f(x)\, J_\nu (\sqrt{\lambda_{\nu n}}\, x)\, dx, \tag{31}$$

porte le nom de *développement de Dini* de la fonction $f(x)$. Ici $\lambda_{\nu n}$ est racine de l'équation (27), et le carré de la norme se calcule par la formule (29). Si l'équation (27) se présente sous la forme $J_\nu(z) = 0$, ce qui correspond au cas de $\gamma = 0$, le développement (30) porte le nom de *développement de Fourier-Bessel.* On a le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Soit la fonction* $\sqrt{x}\, f(x)$ *absolument intégrable sur le segment* $[0, l]$, *et soit* $\nu \geqslant -1/2$. *Alors, pour* $0 < x < l$, *le développement* (30) *a lieu en même temps que le développement correspondant en série de Fourier ordinaire.*

On trouve un exposé de la théorie des développements de Fourier-Bessel et de Dini dans le livre de G. Watson [3].

Dans les problèmes de physique mathématique, on utilise souvent une forme limite des développements de Fourier-Bessel qui se déduit de (30) pour $l \to \infty$. Nous allons établir ce développement à l'aide d'un raisonnement assez peu rigoureux.

On a en vertu de (29)-(31)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\int_0^l xf(x)\,J_\nu(k_nx)\,dx}{\frac{l^2}{2}\,[J'_\nu(k_nl)]^2}\,J_\nu(k_nx), \tag{32}$$

où les $k_n$ se déduisent de l'équation

$$J_\nu(k_nl)=0. \tag{33}$$

La contribution des premiers termes de la série (32) pour $l\to\infty$ est sensiblement nulle, à cause du facteur $l^2$ figurant dans le dénominateur. Nous retiendrons donc les valeurs asymptotiques de $k_n$ pour des $n$ suffisamment élevés. L'équation (33) nous donne

$$\cos(k_nl-\pi\nu/2-\pi/4)\approx 0,$$

d'où

$$k_nl\approx\pi n+\text{const}.$$

Calculons $J'_\nu(k_nl)$ par la formule de dérivation. Il vient

$$[J'_\nu(k_nl)]^2=[J_{\nu+1}(k_nl)]^2\approx\frac{2}{\pi(k_nl)}\sin^2\left(k_nl-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\approx\frac{2}{\pi k_nl}$$

(nous avons posé $\sin^2(k_nl-\pi\nu/2-\pi/4)\approx 1$, car $\cos(k_nl-$ $-\pi\nu/2-\pi/4)\approx 0$). Puisque $\Delta k_n=k_{n+1}-k_n\approx\pi/l$, on peut mettre le développement (32) sous la forme

$$f(x)\approx\sum_{k_n=0}^{\infty}k_nJ_\nu(k_nx)\,\Delta k_n\int_0^l xf(x)\,J_\nu(k_nx)\,dx.$$

Comme $\Delta k_n\to 0$ quand $l\to\infty$, on obtient en intégrant au lieu de sommer en $k_n$

$$f(x)=\int_0^{\infty}kF(k)\,J_\nu(kx)\,dk, \tag{34}$$

$$F(k)=\int_0^{\infty}xf(x)\,J_\nu(kx)\,dx. \tag{35}$$

Le développement (34) est appelé *intégrale de Fourier-Bessel.*

Les conditions dans lesquelles une fonction arbitraire $f(x)$ se laisse développer en intégrale de Fourier-Bessel sont examinées dans [3]. On a un théorème :

THÉORÈME 4. *Soit la fonction* $\sqrt{x}\,f(x)$ *absolument intégrable sur l'intervalle* $]0,\infty[$, *et soit* $\nu\geqslant-1/2$. *Alors le développement* (34)-(35) *a lieu pour* $x>0$ *en même temps que le développement correspondant en intégrale de Fourier.*

Remarquons que pour $\nu = \pm 1/2$ les développements (30) et (34) se réduisent aux développements de la fonction $\sqrt{x}\, f(x)$ suivant les cosinus ($\nu = -{}^1/_2$) ou les sinus ($\nu = {}^1/_2$).

## § 25. Résolution de quelques problèmes fondamentaux de mécanique quantique

Dans le § 9 nous avons examiné une méthode générale de résolution de problèmes de mécanique quantique concernant les états du spectre d'énergies discret dans le cas où il est possible de réduire ces problèmes par séparation des variables aux équations différentielles du type

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(x)}{\sigma(x)} u' + \frac{\tilde{\sigma}(x)}{\sigma^2(x)} u = 0. \qquad (1)$$

Ici $\sigma(x)$ et $\tilde{\sigma}(x)$ sont des polynômes de degré non supérieur à 2, et $\tilde{\tau}(x)$, un polynôme de degré non supérieur à 1. Dans le présent paragraphe, nous allons résoudre quelques problèmes les plus courants de mécanique quantique par cette méthode. Remarquons que les équations différentielles du type (1) se rencontrent dans des problèmes aussi importants que le mouvement d'une particule dans un champ central, l'oscillateur harmonique, les équations de Schrödinger, de Dirac et de Klein-Gordon appliquées au potentiel coulombien, le mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique ou magnétique homogène... En outre, on est conduit à des équations de ce type dans bon nombre de problèmes modèles de physique atomique, moléculaire et nucléaire liés à l'étude des processus de diffusion, d'interaction des neutrons avec les noyaux lourds, à l'analyse du spectre de rotation et de vibration des molécules (par exemple dans la résolution des équations de Schrödinger aux potentiels de Morse, de Kratzer, de Wood-Saxon, de Pöschl-Teller *)).

En cherchant les valeurs propres de l'énergie $E$ et les fonctions propres des équations de Schrödinger, de Dirac ou de Klein-Gordon, on ramène l'équation initiale par séparation des variables à l'équation (1) sur un intervalle $]a, b[$. L'énergie $E$ intervient comme paramètre dans les coefficients de (1). Les solutions des équations initiales pour les états liés sont soumises à des restrictions supplémentaires, qui se traduisent généralement par les conditions suivantes imposées aux solutions de l'équation (1): la fonction $u(x)\sqrt{\tilde{\rho}(x)}$ doit être bornée et de carré intégrable sur $]a, b[$. Ici la fonction $\tilde{\rho}(x)$ est solution de l'équation $(\sigma\tilde{\rho})' = \tilde{\tau}\tilde{\rho}$; elle apparaît quand on met

---

*) Voir S. Flügge, *Practical Quantum Mechanics*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971 (vol. 1).

(1) sous forme auto-adjointe:

$$(\sigma\tilde{\rho}u')' + \tilde{\rho}(x)\frac{\tilde{\sigma}(x)}{\sigma(x)}u = 0.$$

Selon la méthode du § 9, ce problème peut être résolu de la façon suivante. Tout d'abord il convient de faire le changement $u = \varphi(x)\,y$ afin de réduire (1) à l'équation du type hypergéométrique

$$\sigma(x)\,y'' + \tau(x)\,y' + \lambda y = 0$$

en procédant de façon que la fonction $\tau(x) = \tilde{\tau}(x) + 2\pi(x)$ admette sur l'intervalle $]\,a, b\,[$ une dérivée négative et une racine, en supposant que $\sigma(x) > 0$ pour $x \in\, ]\,a, b\,[$. Les valeurs propres de l'énergie se cherchent à partir de l'équation

$$\lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

et les fonctions propres $y_n(x)$ sont des polynômes de degré $n$

$$y_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)}\frac{d^n}{dx^n}[\sigma^n(x)\,\rho(x)]$$

orthogonaux sur $]\,a, b\,[$ par rapport au poids $\rho(x)$ ($B_n$ étant une constante de normalisation).

Examinons quelques problèmes caractéristiques de mécanique quantique qui se laissent résoudre par la méthode proposée.

**1. Résolution de l'équation de Schrödinger pour le champ central.** Le problème fondamental de la mécanique quantique de l'atome est celui du mouvement de l'électron dans un champ d'attraction central. L'importance de ce problème tient à ce que l'hypothèse du champ central utilisé à la description du mouvement des électrons de l'atome s'avère très fructueuse pour le calcul des différentes propriétés des structures atomiques *). Une telle description permet de se faire une idée plus nette des particularités du comportement des atomes et de déterminer leurs états énergétiques sans avoir à résoudre le problème de mécanique quantique des $N$ corps qui présente des difficultés quasi insurmontables.

Pour définir la fonction d'onde $\psi(r)$ d'une particule mobile dans un champ à symétrie centrale $U(r)$, on doit résoudre l'équation de Schrödinger

$$\Delta\psi + \frac{2M}{\hbar^2}[E - U(r)]\,\psi = 0 \qquad (2)$$

($\hbar$ est la constante de Planck, $M$ la masse de la particule, $U(r)$ l'énergie potentielle).

---

*) Voir D. R. Hartree, *The calculation of atomic structures*, New York, Wiley; London, Chapman and Hall, 1957.

Cherchons les solutions particulières de (2) par séparation des variables en coordonnées sphériques, en posant

$$\psi(r) = F(r)\, Y(\theta, \varphi).$$

En procédant dans le même ordre qu'avec l'équation de Laplace (voir § 10), on obtient les équations suivantes pour les fonctions $F(r)$ et $Y(\theta, \varphi)$:

$$\Delta_{\theta\varphi} Y + \lambda Y = 0, \tag{3}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right)+\left[\frac{2M}{\hbar^2}(E-U(r))-\frac{\lambda}{r^2}\right]F(r)=0. \tag{4}$$

On a vu plus haut que l'équation (3) n'admet de solutions bornées et univoques pour $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, que si $\lambda = l(l+1)$, auquel cas $Y(\theta, \varphi) = Y_{lm}(\theta, \varphi)$ est une fonction sphérique.

Puisque

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right)=\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rF),$$

on peut, en faisant le changement $R(r) = rF(r)$, réduire (4) à l'équation

$$R'' + \left[\frac{2M}{\hbar^2}(E-U(r))-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0. \tag{5}$$

Pour les états du spectre discret la fonction d'onde $\psi(r)$ doit vérifier la condition de normalisation

$$\int |\psi(r)|^2 r^2\, dr\, d\Omega = 1.$$

Puisque

$$\int |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega = 1,$$

la condition de normalisation $R(r)$ s'écrira

$$\int_0^\infty R^2(r)\, dr = 1. \tag{6}$$

La fonction $F(r) = \frac{1}{r}R(r)$ est supposée bornée pour $r \to 0$.

**2. Résolution de l'équation de Schrödinger pour le champ coulombien.** Le seul atome pour lequel l'équation de Schrödinger admette une solution exacte est l'atome d'hydrogène. Or, cela ne diminue nullement l'intérêt de cette solution exacte, car les solutions analytiques dégagées sous forme explicite s'avèrent souvent utiles comme point de départ des calculs approchés relatifs à des systèmes de mécanique quantique plus compliqués.

Si l'on veut donner une description de l'atome d'hydrogène en termes de mécanique quantique, on doit prendre en considération

le mouvement relatif de l'électron (masse $m$, charge $-e$) et du noyau (masse $M$, charge $e$). Nous nous appliquerons cependant à résoudre un problème plus général, en admettant que la charge du noyau est égale à $Ze$. Ce problème présente un intérêt physique immédiat, car les valeurs propres de l'énergie calculées dans ce cas correspondent, à des effets relativistes près, aux niveaux d'énergie observés de l'atome d'hydrogène ($Z = 1$), de l'atome d'hélium simplement ionisé ($Z = 2$), etc. Un modèle d'atome hydrogénoïde s'avère en outre utile par exemple pour l'étude des spectres des éléments alcalins, ainsi que des spectres des rayons X des atomes à $Z$ élevé.

Le problème du mouvement de l'électron se réduit facilement à celui du mouvement d'un corps unique: une particule de masse réduite *)

$$\mu = \frac{mM}{m+M} \approx m$$

mobile dans un champ coulombien $U(r) = -Ze^2/r$, i.e. à l'équation de Schrödinger

$$\Delta\psi + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E + \frac{Ze^2}{r}\right)\psi = 0.$$

Puisque l'énergie potentielle $U(r)$ est négative et s'annule à l'infini, il ressort des considérations physiques que les états du spectre discret n'auront lieu que pour $E < 0$.

Passant aux coordonnées sphériques, nous obtenons l'équation pour la fonction $R(r)$:

$$R'' + \left[\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E + \frac{Ze^2}{r}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] R = 0. \qquad (7)$$

Il est bon de passer dans (7) aux variables sans dimension : à cet effet, on utilise le système d'unités atomiques dans lequel les unités de charge, de longueur et d'énergie sont respectivement la charge de l'électron $e$ ($e > 0$) et les quantités

$$a_0 = \hbar^2/(\mu e^2), \quad E_0 = e^2/a_0.$$

L'équation (7) devient alors

$$R'' + \left[2\left(E + \frac{Z}{r}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] R = 0. \qquad (8)$$

Puisque la fonction d'onde $\psi(r)$ doit être bornée et de carré intégrable, la fonction $\frac{1}{r} R(r)$ sera bornée pour $r \to 0$ et soumise à la condition de normalisation (6).

*) Voir par exemple L. Landau et E. Lifchitz, *Mécanique quantique* (théorie non relativiste), t. 3, Moscou, « Mir », 1981.

L'équation (8) est une équation généralisée du type hypergéométrique avec

$$\sigma(r) = r, \quad \tilde{\tau}(r) = 0, \quad \tilde{\sigma}(r) = 2Er^2 + 2Zr - l(l+1).$$

Le problème qui se ramène à l'équation (8) appartient à la classe des problèmes étudiés au § 9. En effet, on a en l'occurrence $\tilde{\rho}(r) = 1/r$. Aussi la fonction $\sqrt{\tilde{\rho}(r)}\, R(r)$ sera-t-elle de carré intégrable sur l'intervalle $]0, \infty[$ et bornée pour $r \to 0$, car on a la condition de normalisation (6) et la fonction $\frac{1}{r} R(r)$ est bornée pour $r \to 0$. Nous sommes donc en droit d'appliquer la méthode considérée plus haut. Réduisons (8) à l'équation du type hypergéométrique

$$\sigma(r)\, y'' + \tau(r)\, y' + \lambda y = 0$$

en posant $R(r) = \varphi(r)\, y(r)$, où $\varphi(r)$ est solution de l'équation

$$\varphi'/\varphi = \pi(r)/\sigma(r).$$

Le polynôme $\pi(r)$ s'écrira alors comme suit:

$$\pi(r) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 2Er^2 - 2Zr + l(l+1) + kr}.$$

La constante $k$ sera choisie à partir de la condition que l'expression sous le radical admette des racines multiples. Le polynôme $\pi(r)$ prendra alors l'une des formes possibles suivantes:

$$\pi(r) = \frac{1}{2} \pm \begin{cases} \sqrt{-2E}\, r + l + \frac{1}{2} & \text{pour } k = 2Z + (2l+1)\sqrt{-2E}, \\ \sqrt{-2E}\, r - l - \frac{1}{2} & \text{pour } k = 2Z - (2l+1)\sqrt{-2E}. \end{cases}$$

Il convient d'en choisir celle qui assure à la fonction $\tau(r) = \tilde{\tau}(r) + 2\pi(r)$ d'avoir une dérivée négative et la racine sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Ces conditions sont vérifiées donc par la fonction

$$\tau(r) = 2\left(l + 1 - \sqrt{-2E}\, r\right),$$

ce qui nous donne

$$\pi(r) = l + 1 - \sqrt{-2E}\, r, \quad \varphi(r) = r^{l+1} e^{-\sqrt{-2E}\, r},$$

$$\lambda = 2\left[Z - (l+1)\sqrt{-2E}\right], \quad \rho(r) = r^{2l+1} e^{-2\sqrt{-2E}\, r}.$$

Les valeurs propres de l'énergie $E$ se cherchent à partir de l'équation

$$\lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' = 0 \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots),$$

qui donne

$$E = -\frac{Z^2}{2(n+l+1)^2} \tag{9}$$

La valeur de l'énergie $E$ se définit complètement par le nombre $n + l + 1$, appelé *nombre quantique principal.*

Les fonctions propres $y(r) = y_{nl}(r)$ s'écrivent alors sous la forme

$$y_{nl}(r) = \frac{B_{nl}}{r^{2l+1}\exp\left(-\frac{2Zr}{n+l+1}\right)} \frac{d^n}{dr^n}\left[r^{n+2l+1}\exp\left(-\frac{2Zr}{n+l+1}\right)\right]$$

et se confondent à un facteur près avec les polynômes de Laguerre $L_n^{2l+1}(x)$, où $x = \frac{2Zr}{n+l+1}$ *). La fonction radiale $R(r) = R_{nl}(r)$ s'écrira définitivement sous la forme

$$R_{nl}(r) = C_{nl}e^{-x/2}x^{l+1}L_n^{2l+1}(x). \tag{10}$$

On s'assure aisément que les fonctions $R_{nl}(r)$ satisfont à la condition $\int\limits_0^\infty R_{nl}^2(r)\,dr < \infty$ que nous avons imposée dès le début. La constante $C_{nl}$ se cherche de la condition de normalisation (6):

$$\int\limits_0^\infty R_{nl}^2(r)\,dr = 1,$$

ou

$$\frac{n+l+1}{2Z}C_{nl}^2\int\limits_0^\infty e^{-x}x^{2l+2}[L_n^{2l+1}(x)]^2\,dx = 1. \tag{11}$$

Pour calculer l'intégrale figurant dans (11), on peut utiliser la relation de récurrence pour les polynômes de Laguerre (voir § 7). On a

$$xL_n^{2l+1} = 2(n+l+1)L_n^{2l+1} - (n+1)L_{n+1}^{2l+1} - (n+2l+1)L_{n-1}^{2l+1}. \tag{12}$$

*) Dans les manuels de mécanique quantique, il est d'usage de désigner le nombre des zéros de la fonction radiale $R(r)$ par $n_r$, et le nombre quantique principal par $n$. Avec ces notations, on mettra $n - l - 1$ au lieu de $n$ dans toutes les formules indiquées.

17—0592

En vertu de la propriété d'orthogonalité des polynômes de Laguerre, on en déduit aussitôt

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{2l+2} [L_n^{2l+1}(x)]^2\, dx =$$

$$= \int_0^\infty e^{-x} x^{2l+1} L_n^{2l+1}(x)\, [2(n+l+1)\, L_n^{2l+1}(x) + \ldots]\, dx =$$

$$= 2(n+l+1) \int_0^\infty e^{-x} x^{2l+1} [L_n^{2l+1}(x)]^2\, dx = 2(n+l+1)\, d_n^2,$$

où $d_n^2$ est le carré de la norme du polynôme $L_n^{2l+1}(x)$. On a donc

$$C_{nl}^2 = \frac{Z}{(n+l+1)^2\, d_n^2} = \frac{Zn\,!}{(n+l+1)^2\,(n+2l+1)\,!}. \tag{13}$$

La fonction radiale la plus simple correspond au cas où $n = 0$:

$$R_{0l}(r) = \frac{1}{l+1} \sqrt{\frac{Z}{(2l+1)\,!}}\, e^{-x/2} x^{l+1}.$$

Pour $l = 0$ la fonction radiale est la plus compliquée: elle admet autant de zéros que le permet l'énergie donnée. Or, dans ce cas-là la fonction d'onde dépend des angles $\theta$, $\varphi$ de la façon la plus simple: pour $l = 0$ elle présente la symétrie sphérique, car

$$Y_{00}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}.$$

*Exemple 1.* Connaissant les fonctions radiales $R_{nl}(r)$, on peut calculer les différentes caractéristiques de l'atome hydrogénoïde, telles que l'énergie potentielle moyenne $\overline{u}_{nl}$ de l'interaction électrostatique entre l'électron et le noyau, ou la distance moyenne $\overline{r}_{nl}$ entre l'électron et le noyau.

A l'aide de (10) et de (13), on obtient

$$\overline{u}_{nl} = -\int_0^\infty \frac{Z}{r} R_{nl}^2(r)\, dr =$$

$$= ZC_{nl}^2 \int_0^\infty e^{-x} x^{2l+1} [L_n^{2l+1}(x)]^2\, dx = -ZC_{nl}^2 d_n^2 = -\frac{Z}{(n+l+1)^2}.$$

Ainsi donc, l'énergie globale de l'électron $E$ (voir (9)) est égale à la moitié de l'énergie potentielle moyenne.

Ensuite

$$\bar{r}_{nl} = \int_0^\infty r R_{nl}^2(r)\, dr = C_{nl}^2 \left(\frac{n+l+1}{2Z}\right)^2 \int_0^\infty e^{-x} x^{2l+1} [x L_n^{2l+1}(x)]^2\, dx.$$

Pour calculer l'intégrale, il suffit de faire intervenir la relation de récurrence (12) et de profiter de l'orthogonalité des polynômes de Laguerre :

$$\bar{r}_{nl} = C_{nl}^2 \left(\frac{n+l+1}{2Z}\right)^2 [(n+1)^2 d_{n+1}^2 + 4(n+l+1)^2 d_n^2 + (2l+1)^2 d_{n-1}^2] =$$

$$= C_{nl}^2 \left(\frac{n+l+1}{2Z}\right)^2 \frac{(2l+1)!}{n!} 2 [3(n+l+1)^2 - l(l+1)] =$$

$$= \frac{1}{2Z} [3(n+l+1)^2 - l(l+1)].$$

*Exemple 2.* Cherchons le potentiel électrostatique créé dans un point donné de l'espace par un atome hydrogénoïde en utilisant à cette effet des fonctions d'onde hydrogénoïdes.

Supposons que l'état stationnaire d'un électron, mobile dans le champ coulombien créé par le noyau de charge $Ze$, soit caractérisé par les nombres quantiques $n$, $l$, $m$. La masse de l'électron étant faible devant celle du noyau, on peut admettre sans grande erreur que le noyau est immobile dans un point $r = 0$. Cherchons le potentiel moyen $V(r)$ créé en $r$ par l'électron et le noyau, nous rappelant que dans les unités adoptées le potentiel du noyau s'écrit $Z/r$. Il vient

$$V(r) = \frac{Z}{r} - \int \frac{|\psi_{nlm}(r')|^2}{|r - r'|} (r')^2\, dr'\, d\Omega'.$$

Il est facile de calculer l'intégrale à l'aide de la fonction génératrice pour les polynômes de Legendre et du théorème d'addition pour les fonctions sphériques (voir § 10, n° 5) :

$$\frac{1}{|r - r'|} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{r_<^s}{r_>^{s+1}} \left[\frac{4\pi}{2s+1} \sum_{m'=-s}^{s} Y_{sm'}^*(\theta', \varphi')\, Y_{sm'}(\theta, \varphi)\right].$$

Puisque

$$\psi_{nlm}(r') = \frac{1}{r'} R_{nl}(r')\, Y_{lm}(\theta', \varphi'),$$

il vient

$$\int \frac{|\psi_{nlm}(r')|^2}{|r-r'|}(r')^2\,dr'\,d\Omega' =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2s+1} \sum_{m'} Y_{sm'}(\theta, \varphi) \int \frac{r_<^s}{r_>^{s+1}} R_{nl}^2(r')\,dr' \times$$

$$\times \int Y_{lm}(\theta', \varphi')\, Y_{lm}^*(\theta', \varphi')\, Y_{sm'}^*(\theta', \varphi')\, d\Omega'. \qquad (14)$$

Intégrons suivant $\varphi'$ en utilisant la forme explicite des fonctions sphériques ; il ne reste, dans la somme en $m'$, qu'un seul terme, celui correspondant à $m' = 0$. Il vient définitivement

$$V(r) = \frac{Z}{r} - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2s+1} Y_{s0}(\theta, \varphi) \int_0^{\infty} \frac{r_<^s}{r_>^{s+1}} R_{nl}^2(r')\,dr' \times$$

$$\times \int Y_{lm}(\theta', \varphi')\, Y_{lm}^*(\theta', \varphi')\, Y_{s0}^*(\theta', \varphi')\, d\Omega.$$

L'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{r_<^s}{r_>^{s+1}} R_{nl}^2(r')\,dr'$ peut s'écrire sous la forme :

$$\int_0^{\infty} \frac{r_<^s}{r_>^{s+1}} R_{nl}^2(r')\,dr' = \frac{1}{r^{s+1}} \int_0^{r} (r')^s R_{nl}^2(r')\,dr' + r^s \int_r^{\infty} \frac{R_{nl}^2(r')}{(r')^{s+1}}\,dr'.$$

L'intégrale du produit de trois fonctions sphériques se réduit à celle du produit de trois fonctions $\Theta_{lm}(\cos\theta)$ :

$$\int Y_{lm}(\theta', \varphi')\, Y_{lm}^*(\theta', \varphi')\, Y_{s0}^*(\theta', \varphi')\, d\Omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \Theta_{lm}^2(x)\, \Theta_{s0}(x)\, dx.$$

La dernière intégrale se laisse exprimer à l'aide des coefficients de Clebsch-Gordan ou des coefficients de Wigner, qui sont disponibles sous forme de tables *). Comme les fonctions $\Theta_{lm}(x)$ sont orthogonales, l'intégrale en question n'est pas nulle que pour $s = 0, 2, \ldots$ $\ldots, 2l$, i.e. la somme en $s$ de (14) contient un nombre fini de termes.

Dans le cas où l'électron est à son état fondamental ($n = 0$, $l = 0$), toutes les intégrales se calculent sans peine. On obtient en définitive

$$V(r) = \frac{Z-1}{r} + \left(Z + \frac{1}{r}\right) e^{-2Zr}.$$

Pour $r$ petits on a, comme il fallait s'y attendre, $V(r) \approx Z/r$, et pour

*) A. R. E. Edmonds, *Angular momentum in quantum mechanics.* CERN 55-26, Geneva, 1955.

$r \to \infty$ on a $V(r) \approx (Z-1)/r$ (l'électron fait écran au champ du noyau).

**3. Résolution des équations de Klein-Gordon et de Dirac pour le champ coulombien.** Nous venons de considérer l'équation de Schrödinger pour une particule chargée mobile dans le champ coulombien. Si l'énergie de la particule diffère sensiblement de son énergie de repos égale à $Mc^2$ (où $M$ est la masse de la particule et $c$ la vitesse de la lumière), l'équation de Schrödinger devient inopérante: il convient d'utiliser des généralisations relativistes de cette dernière, i.e. soit l'équation de Klein-Gordon, soit l'équation de Dirac, en fonction de la valeur du moment angulaire intrinsèque de la particule (spin).

a) Considérons d'abord l'*équation de Klein-Gordon* qui définit le mouvement d'une particule chargée de charge $-e$ ($e > 0$), de spin entier et de masse $M$ dans un champ coulombien d'énergie potentielle $U(r) = -Ze^2/r$. Un tel problème se pose par exemple quand on étudie le mouvement des mésons $\pi$ dans le champ des noyaux atomiques. Dans un système d'unités où la masse de la particule $M$, la constante de Planck $\hbar$ et la vitesse de la lumière $c$ sont égales à 1, l'équation de Klein-Gordon prend la forme

$$\Delta\psi + \left[\left(E+\frac{\mu}{r}\right)^2 - 1\right]\psi = 0 \quad \left(\mu = \frac{Ze^2}{\hbar c} \approx \frac{Z}{137}\right). \tag{15}$$

Pour les états liés on a $0 < E < 1$.

Nous chercherons des solutions particulières de (15) par séparation des variables en coordonnées sphériques, en posant $\psi(r) = F(r)\,Y(\theta, \varphi)$. Procédant dans le même ordre qu'avec l'équation de Laplace (voir § 10), nous obtiendrons les équations suivantes pour les fonctions $F(r)$ et $Y(\theta, \varphi)$ :

$$\Delta_{\theta\varphi} Y + \lambda Y = 0, \tag{16}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right) + \left[\left(E+\frac{\mu}{r}\right)^2 - 1 - \frac{\lambda}{r^2}\right]F(r) = 0. \tag{17}$$

On a vu plus haut que l'équation (16) n'admet de solutions bornées et univoques pour $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ que si $\lambda = l(l+1)$, auquel cas $Y(\theta, \varphi) = Y_{lm}(\theta, \varphi)$ est une fonction sphérique. L'équation (17) se réduit par le changement $R(r) = rF(r)$ à

$$R'' + \left[\left(E+\frac{\mu}{r}\right)^2 - 1 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R = 0. \tag{18}$$

L'équation (18) est une équation généralisée du type hypergéométrique avec $\sigma(r) = r$, $\tilde{\tau}(r) = 0$, $\tilde{\sigma}(r) = (Er+\mu)^2 - r^2 - l(l+1)$. La fonction $R(r)$ doit vérifier la condition de normalisation

$$\int_0^\infty R^2(r)\,dr = 1 \tag{19}$$

et être bornée pour $r \to 0$. Remarquons qu'en résolvant l'équation de Schrödinger correspondante, on demande que soit bornée pour $r \to 0$ la fonction $\frac{1}{r} R(r)$, ce qui constitue une condition plus restrictive.

L'équation (18) admet une singularité pour $r \to 0$. Voyons ce que devient $R(r)$ quand $r \sim 0$. Puisqu'on a pour $r \to 0$

$$\left(E+\frac{\mu}{r}\right)^2-1-\frac{l(l+1)}{r^2} \approx \frac{\mu^2-l(l+1)}{r^2},$$

le comportement de la fonction $R(r)$ se définira approximativement dans le voisinage du point $r = 0$ par l'équation d'Euler

$$R''+\frac{\mu^2-l(l+1)}{r^2} R=0$$

dont les solutions se présentent sous la forme

$$R(r) = C_1 r^{\nu+1} + C_2 r^{-\nu-1},$$

où

$$\nu = -1/2+\sqrt{(l+1/2)^2-\mu^2}$$

(il sera supposé par la suite que $\mu < l + {}^1/_2$). Comme la fonction $R(r)$ doit rester bornée pour $r \to 0$, on a $C_2 = 0$, i.e. $R(r) \approx \approx C_1 r^{\nu+1}$ pour $r \to 0$.

Le problème qui nous a conduits à l'équation (18) appartient à la classe des problèmes déjà étudiés au § 9. En effet, nous avons dans le cas considéré $\tilde{\rho}(r) = 1/r$, en sorte que la fonction $\sqrt{\tilde{\rho}(r)}\, R(r)$ doit rester bornée pour $r \to 0$ et de carré intégrable sur l'intervalle $]0, \infty[$ en raison du comportement de $R(r)$ pour $r \to 0$ et conformément à la condition de normalisation (19). Nous sommes donc en droit d'appliquer la méthode du § 9.

Ramenons (18) à l'équation du type hypergéométrique

$$\sigma(r)\, y'' + \tau(r)\, y' + \lambda y = 0$$

en posant $R(r) = \varphi(r)\, y(r)$, où $\varphi(r)$ est solution de l'équation

$$\varphi'/\varphi = \pi(r)/\sigma(r).$$

Le polynôme $\pi(r)$ se définira alors par l'expression

$$\pi(r) = 1/2 \pm \sqrt{(l+1/2)^2-\mu^2-2\mu E r+(1-E^2)\, r^2+kr}.$$

La constante $k$ sera choisie de telle façon que l'expression sous le radical admette des racines multiples. Le polynôme $\pi(r)$ se présentera donc sous l'une des formes suivantes :

$$\pi(r) = 1/2 \pm \begin{cases} \sqrt{1-E^2}\, r+\nu+\frac{1}{2} & \text{pour } k=2\mu E+(2\nu+1)\sqrt{1-E^2}, \\ \sqrt{1-E^2}\, r-\nu-\frac{1}{2} & \text{pour } k=2\mu E-(2\nu+1)\sqrt{1-E^2}. \end{cases}$$

De toutes les formes possibles de $\pi(r)$, on doit choisir celle pour laquelle la fonction $\tau(r) = \tilde{\tau}(r) + 2\pi(r)$ a sa racine sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et une dérivée négative. Ces conditions seront vérifiées par la fonction $\tau(r) = 2(\nu + 1 - ar)$, où $a = \sqrt{1 - E^2}$, ce qui correspond à

$$\pi(r) = \nu + 1 - ar, \qquad \varphi(r) = r^{\nu+1}e^{-ar},$$
$$\lambda = 2[\mu E - (\nu + 1)a], \ \rho(r) = r^{2\nu+1}e^{-2ar}$$
$$\left(a=\sqrt{1-E^2}, \quad \nu=-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2-\mu^2}\right).$$

Les valeurs propres de l'énergie $E$ se cherchent à partir de l'équation

$$\lambda+n\tau'+\frac{n(n-1)}{2}\sigma''=0;$$

on obtient

$$E=E_n=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\mu}{n+\nu+1}\right)^2}} \qquad (n=0,\ 1,\ \ldots). \tag{20}$$

Les fonctions propres correspondantes $y = y_n(r)$ se présentent alors comme suit:

$$y_n(r)=\frac{B_{nl}}{r^{2\nu+1}e^{-2ar}}\frac{d^n}{dr^n}\left(r^{n+2\nu+1}e^{-2ar}\right)$$

et se confondent à un facteur près avec les polynômes de Laguerre $L_n^{2\nu+1}(x)$, où $x = 2ar$. Les fonctions propres $R(r) = R_{nl}(r)$ s'écriront

$$R_{nl}(r)=C_{nl}x^{\nu+1}e^{-x/2}L_n^{2\nu+1}(x).$$

On vérifie sans peine que les fonctions $R_{nl}(r)$ satisfont à la condition $\int_0^\infty R_{nl}^2(r)\,dr < \infty$ formulée au départ. La constante $C_{nl}$ se trouve de la condition de normalisation (19), exactement comme dans le cas de l'équation de Schrödinger correspondante.

Examinons le passage à la limite non relativiste. Dans ce cas la constante $\mu$ est petite. Evaluons les autres quantités pour $\mu \to 0$:

$$\nu \approx l, \ E \approx 1-\frac{\mu^2}{2(n+l+1)^2}, \quad a=\sqrt{1-E^2}\approx\frac{\mu}{n+l+1},$$
$$R_{nl}(r)\approx C_{nl}x^{l+1}e^{-x/2}L_n^{2l+1}(x), \quad x=\frac{2\mu}{n+l+1}r.$$

Ces formules se confondent avec celles obtenues dans le n° 2 pour l'équation de Schrödinger: en effet, la quantité $\mu r$ dans notre système d'unités correspond à $Zr$ dans le système atomique, et l'éner-

gie

$$E=1-\frac{\mu^2}{2(n+l+1)^2}$$

renferme l'énergie de repos de la particule $E_0 = 1$.

b) Considérons maintenant l'*équation de Dirac* qui définit le mouvement d'une particule chargée de spin demi-entier dans un champ

$$U(r)=-\frac{Ze^2}{r}.$$

Dans ce cas la fonction d'onde de la particule admet quatre composantes $\psi_k(r)$ $(k = 1, \ldots, 4)$. Dans un système d'unités où la masse de la particule $M$, la constante de Planck $\hbar$ et la vitesse de la lumière $c$ sont égales à 1, l'équation de Dirac s'écrira (voir [2]):

$$\left.\begin{aligned}
i\left(E+\frac{\mu}{r}+1\right)\psi_1+\frac{\partial\psi_3}{\partial z}+\frac{\partial\psi_4}{\partial x}-i\frac{\partial\psi_4}{\partial y}&=0,\\
i\left(E+\frac{\mu}{r}+1\right)\psi_2-\frac{\partial\psi_4}{\partial z}+\frac{\partial\psi_3}{\partial x}+i\frac{\partial\psi_3}{\partial y}&=0,\\
i\left(E+\frac{\mu}{r}-1\right)\psi_3+\frac{\partial\psi_1}{\partial z}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x}-i\frac{\partial\psi_2}{\partial y}&=0,\\
i\left(E+\frac{\mu}{r}-1\right)\psi_4-\frac{\partial\psi_2}{\partial z}+\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+i\frac{\partial\psi_1}{\partial y}&=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Les quantités $E$ et $\mu$ gardent le même sens que dans l'équation de Klein-Gordon, avec $0 < E < 1$.

En coordonnées sphériques $(r, \theta, \varphi)$, les variables dans (21) se séparent si l'on veut chercher la solution sous la forme

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\psi_1(r)\\ \psi_2(r)\end{pmatrix}&=f(r)\,\Omega_{jlm}(\theta, \varphi),\\
\begin{pmatrix}\psi_3(r)\\ \psi_4(r)\end{pmatrix}&=(-1)^{\frac{l-l'+1}{2}}\,g(r)\,\Omega_{jl'm}(\theta, \varphi).
\end{aligned} \qquad (22)$$

Ici $j$ est le nombre quantique caractérisant le moment angulaire total de la particule $(j = 1/2, 3/2, \ldots)$, $l$ et $l'$ sont les nombres quantiques orbitaux qui, pour un $j$ donné, peuvent prendre deux valeurs, $j - 1/2$ et $j + 1/2$, avec par ailleurs $l' = 2j - l$; le nombre quantique $m$ parcourt les valeurs demi-entières comprises entre $-j$ et $j$.

Les quantités $\Omega_{jlm}(\theta, \varphi)$ et $\Omega_{jl'm}(\theta, \varphi)$ définissent l'influence des variables angulaires sur la fonction d'onde. Ces quantités, appelées *spineurs sphériques*, sont liées aux fonctions sphériques $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$

par les relations suivantes *):

$$\Omega_{jlm}=\begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{j+m}{2l+1}}\,Y_{l,\,m-1/2}(\theta,\ \varphi) \\ \sqrt{\dfrac{j-m}{2l+1}}\,Y_{l,\,m+1/2}(\theta,\ \varphi) \end{pmatrix} \text{pour } l=j-1/2,$$

$$\Omega_{jlm}=\begin{pmatrix} -\sqrt{\dfrac{j-m+1}{2l+1}}\,Y_{l,\,m-1/2}(\theta,\ \varphi) \\ \sqrt{\dfrac{j+m+1}{2l+1}}\,Y_{l,\,m+1/2}(\theta,\ \varphi) \end{pmatrix} \text{pour } l=j+1/2.$$

Portant (22) dans (21), on obtient un système d'équations pour les fonctions $f(r)$ et $g(r)$:

$$\begin{aligned} &f'+\frac{1+\varkappa}{r}f-\left(E+1+\frac{\mu}{r}\right)g=0,\\ &g'+\frac{1-\varkappa}{r}g+\left(E-1+\frac{\mu}{r}\right)f=0, \end{aligned} \tag{23}$$

où

$$\varkappa=\begin{cases} -(l+1) & \text{pour } l=j-1/2,\\ \quad l & \text{pour } l=j+1/2. \end{cases}$$

Remarquons qu'en approximation non relativiste on a $|f(r)|\gg$ $\gg |g(r)|$ (ce qui sera montré par la suite).

Les conditions définissant les fonctions $f(r)$ et $g(r)$ pour les états du spectre discret se réduisent à ce qui suit: les fonctions $rf(r)$ et $rg(r)$ doivent rester bornées pour $r\to 0$ et vérifier la condition de normalisation

$$\int_0^\infty r^2\,[f^2(r)+g^2(r)]\,dr=1. \tag{24}$$

Mettons le système d'équations (23) sous forme matricielle. Soient

$$u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}f(r)\\g(r)\end{pmatrix},\quad u'=\begin{pmatrix}u_1'\\u_2'\end{pmatrix}.$$

On a alors

$$u'=Au, \tag{25}$$

*) Voir par exemple А. Ахиезер, В. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, М., « Наука », 1981 (A. Akhiezer, V. Berestetski, *Electrodynamique quantique*); voir aussi [2].

où

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1+\varkappa}{r} & 1+E+\frac{\mu}{r} \\ 1-E-\frac{\mu}{r} & -\frac{1-\varkappa}{r} \end{pmatrix}.$$

Pour définir $u_1(r)$, éliminons $u_2(r)$ entre les équations (25); cela nous donnera une équation différentielle du second ordre pour la fonction $u_1(r)$

$$u_1''-\left(a_{11}+a_{22}+\frac{a_{12}'}{a_{12}}\right)u_1'+\left(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}-a_{11}'+\frac{a_{12}'}{a_{12}}a_{11}\right)u_1=0. \tag{26}$$

D'une façon analogue, en éliminant $u_1(r)$, nous obtenons l'équation pour $u_2(r)$:

$$u_2''-\left(a_{11}+a_{22}+\frac{a_{21}'}{a_{21}}\right)u_2'+\left(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}-a_{22}'+\frac{a_{21}'}{a_{21}}a_{22}\right)u_2=0. \tag{27}$$

Les coefficients de la matrice $A$ s'écrivent

$$a_{ik}=b_{ik}+c_{ik}/r,$$

où $b_{ik}$ et $c_{ik}$ sont des constantes. Les équations (26) et (27) ne sont pas des équations généralisées du type hypergéométrique. Cela tient à ce que

$$\frac{a_{12}'}{a_{12}}=-\frac{c_{12}}{c_{12}r+b_{12}r^2},$$

ce qui fait que les coefficients affectant $u_1'(r)$ et $u_1(r)$ dans l'équation (26) s'écrivent

$$a_{11}+a_{22}+\frac{a_{12}'}{a_{12}}=\frac{p_1(r)}{r}-\frac{c_{12}}{c_{12}r+b_{12}r^2},$$

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}-a_{11}'+\frac{a_{12}'}{a_{12}}a_{11}=\frac{p_2(r)}{r^2}-\frac{c_{12}}{c_{12}r+b_{12}r^2}\,\frac{c_{11}+b_{11}r}{r}$$

($p_1(r)$ et $p_2(r)$ étant des polynômes de degré non supérieur à 1 et à 2 respectivement). L'équation (26) serait une équation généralisée du type hypergéométrique avec $\sigma(r)=r$ si les coefficients $b_{12}$ ou $c_{12}$ étaient nuls. Il y a donc intérêt à faire les transformations suivantes. Un changement linéaire

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

dans lequel la matrice non dégénérée $C$ ne dépend pas de $r$, nous donne un système d'équations pour les fonctions $v_1(r)$ et $v_2(r)$ analogue à

(23). En effet, on obtient au lieu de (25) l'équation

$$v' = \tilde{A}v \tag{28}$$

dans laquelle

$$v=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}=CAC^{-1}=\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix}.$$

Les coefficients $\tilde{a}_{ik}$ représentent évidemment des combinaisons linéaires des $a_{ik}$. Ils s'écrivent donc

$$\tilde{a}_{ik}=\tilde{b}_{ik}+\tilde{c}_{ik}/r,$$

où $\tilde{b}_{ik}$ et $\tilde{c}_{ik}$ sont des constantes.

Les équations définissant les fonctions $v_1(r)$ et $v_2(r)$ seront analogues à (26) et (27):

$$v_1''-\left(\tilde{a}_{11}+\tilde{a}_{22}+\frac{\tilde{a}'_{12}}{\tilde{a}_{12}}\right)v_1'+\left(\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22}-\tilde{a}_{12}\tilde{a}_{21}-\tilde{a}'_{11}+\frac{\tilde{a}'_{12}}{\tilde{a}_{12}}\tilde{a}_{11}\right)v_1=0, \tag{29}$$

$$v_2''-\left(\tilde{a}_{11}+\tilde{a}_{22}+\frac{\tilde{a}'_{21}}{\tilde{a}_{21}}\right)v_2'+\left(\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22}-\tilde{a}_{12}\tilde{a}_{21}-\tilde{a}'_{22}+\frac{\tilde{a}'_{21}}{\tilde{a}_{21}}\tilde{a}_{22}\right)v_2=0. \tag{30}$$

Remarquons que le calcul des coefficients dans (29) et (30) est facilité par la similitude des matrices $A$ et $\tilde{A}$:

$$\tilde{a}_{11}+\tilde{a}_{22}=a_{11}+a_{22}, \quad \tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22}-\tilde{a}_{12}\tilde{a}_{21}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Pour que (29) soit une équation généralisée du type hypergéométrique, il suffit de poser soit $\tilde{b}_{12}=0$, soit $\tilde{c}_{12}=0$. Pour l'équation (30), la condition est analogue: soit $\tilde{b}_{21}=0$, soit $\tilde{c}_{21}=0$. Ces conditions impliquent des restrictions au choix de la matrice $C$. Soit

$$C=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Alors

$$C^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}, \quad \Delta=\alpha\delta-\beta\gamma,$$

$$\tilde{A}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} a_{11}\alpha\delta-a_{12}\alpha\gamma+a_{21}\beta\delta-a_{22}\beta\gamma & a_{12}\alpha^2-a_{21}\beta^2+(a_{22}-a_{11})\alpha\beta \\ a_{21}\delta^2-a_{12}\gamma^2+(a_{11}-a_{22})\gamma\delta & -a_{11}\beta\gamma+a_{12}\alpha\gamma-a_{21}\beta\delta+a_{22}\alpha\delta \end{pmatrix}.$$

Avec $\tilde{b}_{12} = 0$ on a $(1+E)\,\alpha^2 - (1-E)\,\beta^2 = 0$,
» $\tilde{c}_{12} = 0$ » $2\varkappa\alpha\beta + \mu\,(\alpha^2+\beta^2) = 0$,
» $\tilde{b}_{21} = 0$ » $(1+E)\,\gamma^2 - (1-E)\,\delta^2 = 0$,
» $\tilde{c}_{21} = 0$ » $2\varkappa\gamma\delta + \mu\,(\gamma^2+\delta^2) = 0$.

Nous voyons que les quantités $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ peuvent être choisies de différentes manières. Les auteurs des manuels de mécanique quantique se bornent généralement à examiner une seule variante définie par $\tilde{b}_{12} = 0$, $\tilde{b}_{21} = 0$. Nous allons considérer, à titre d'exemple, le cas où les constantes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sont choisies en posant $\tilde{c}_{12} = 0$, $\tilde{c}_{21} = 0$ (nous verrons par la suite que ces conditions sont préférables à $\tilde{b}_{12} = 0$, $\tilde{b}_{21} = 0$). Ces conditions sont vérifiées si la matrice $C$ se présente sous la forme

$$C = \begin{pmatrix} \mu & \nu - \varkappa \\ \nu - \varkappa & \mu \end{pmatrix},$$

où $\nu = \sqrt{\varkappa^2 - \mu^2}$. Nous obtenons alors le système d'équations suivant pour les fonctions $v_1(r)$ et $v_2(r)$ :

$$v_1' = \left(-\frac{\nu+1}{r} + \frac{E\mu}{\nu}\right) v_1 + \left(1 + \frac{E\varkappa}{\nu}\right) v_2, \tag{31}$$

$$v_2' = \left(1 - \frac{E\varkappa}{\nu}\right) v_1 + \left(\frac{\nu-1}{r} - \frac{E\mu}{\nu}\right) v_2. \tag{32}$$

Si $1 + E\varkappa/\nu \neq 0$, on peut éliminer entre (31) et (32) la fonction $v_2(r)$ pour obtenir l'équation différentielle relative à la fonction $v_1(r)$ :

$$v_1'' + \frac{2}{r} v_1' + \frac{(E^2-1)\,r^2 + 2E\mu r - \nu\,(\nu+1)}{r^2} v_1 = 0. \tag{33}$$

Soit maintenant $1 + E\varkappa/\nu = 0$, i.e. $E = -\nu/\varkappa$, ce qui ne peut avoir lieu qu'avec $\varkappa < 0$, car $\nu > 0$ et $E > 0$. La solution de (31) se présente alors sous la forme

$$v_1(r) = C_1 r^{-\nu-1} e^{\frac{E\mu}{\nu} r}.$$

La fonction $v_1(r)$ ne peut servir de solution qu'avec $C_1 = 0$, auquel cas la fonction $v_2(r)$ définie par (32) s'écrira

$$v_2(r) = C_2 r^{\nu-1} e^{-\frac{E\mu}{\nu} r}.$$

Pour $C_2 \neq 0$, la fonction $v_2(r)$ peut évidemment servir de solution.

Etudions maintenant la solution de (33). Voyons ce que devient la fonction $v_1(r)$ pour $r \to 0$. Puisque

$$|(E^2 - 1) r^2 + 2E\mu r| \ll \nu(\nu + 1)$$

pour $r \to 0$, le comportement de $v_1(r)$ dans le voisinage du point $r = 0$ se définira approximativement par l'équation d'Euler

$$r^2 v_1'' + 2rv_1' - \nu(\nu + 1) v_1 = 0,$$

qui a pour solution

$$v_1(r) = C_1 r^{\nu} + C_2 r^{-\nu-1}.$$

Les conditions imposées à $v_1(r)$ impliquent $C_2 = 0$. Pour $r \sim 0$ on a donc $v_1(r) \approx C_1 r^{\nu}$.

L'équation (33) est une équation généralisée du type hypergéométrique avec $\sigma(r) = r$, $\tilde{\tau}(r) = 2$, $\tilde{\sigma}(r) = (E^2 - 1) r^2 + 2E\mu r - \nu(\nu + 1)$. Le problème conduisant à (33) appartient à la classe des problèmes déjà traités dans le § 9. En effet, on a dans le cas considéré $\tilde{\rho}(r) = r$. La fonction $\sqrt{\tilde{\rho}(r)}\, v_1(r)$ doit être de carré intégrable sur l'intervalle $]0, \infty[$ et rester bornée pour $r \to 0$, en raison de la condition de normalisation (24) et du comportement de $v_1(r)$ pour $r \to 0$. On est donc en droit d'appliquer la méthode du § 9. Réduisons (33) à l'équation du type hypergéométrique

$$\sigma(r) y'' + \tau(r) y' + \lambda y = 0$$

par le changement $v_1 = \varphi(r) y$, où $\varphi(r)$ vérifie l'équation

$$\varphi'/\varphi = \pi(r)/\rho(r)$$

($\pi(r)$ étant un polynôme de degré non supérieur à 1). Des quatre formes possibles du polynôme $\pi(r)$, nous choisirons celle pour laquelle la fonction $\tau(r) = \tilde{\tau}(r) + 2\pi(r)$ a sa racine sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et une dérivée négative. Ces conditions seront vérifiées par la fonction $\tau(r) = 2(\nu + 1 - ar)$, où $a = \sqrt{1 - E^2}$, et

$$\pi(r) = \nu - ar, \quad \varphi(r) = r^{\nu} e^{-ar},$$

$$\lambda = 2[\mu E - (\nu + 1) a], \quad \rho(r) = r^{2\nu+1} e^{-2ar}$$

$$(\nu = \sqrt{\varkappa^2 - \mu^2}).$$

Les valeurs de l'énergie $E = E_n$ se déduisent de l'équation

$$\lambda + n\tau' + \frac{1}{2} n(n - 1)\sigma'' = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

d'où

et les fonctions propres, de la formule de Rodrigues

$$y_n(r) = \frac{C_n}{\rho(r)} \frac{d^n}{dr^n} [\sigma^n(r)\rho(r)] =$$
$$= C_n r^{-2\nu-1} e^{2ar} \frac{d^n}{dr^n} (r^{n+2\nu+1} e^{-2ar}). \qquad (35)$$

Les fonctions $y_n(r)$ se confondent, à un coefficient de proportionnalité près, avec les polynômes de Laguerre $L_n^{2\nu+1}(x)$, où $x = 2ar$.

La valeur propre de l'énergie $E = -\nu/\varkappa$ obtenue précédemment vérifie l'équation (34) pour $n = -1$. Il est donc naturel de remplacer $n$ par $n - 1$ dans les formules (34), (35) et de chercher les valeurs propres de l'énergie à partir de l'égalité

$$\mu E - (n + \nu) a = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots). \qquad (36)$$

Les fonctions propres $v_1(r)$ s'écriront sous la forme

$$v_1(r) = \begin{cases} A_n x^\nu e^{-x/2} L_{n-1}^{2\nu+1}(x) & \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{pour} \quad n = 0. \end{cases} \qquad (37)$$

Il est facile de s'assurer que les fonctions $rv_1(r)$ sont de carré intégrable, comme exigé initialement.

De l'équation (31) on déduit pour $E = E_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$

$$v_2(r) = \frac{1}{1 + \frac{E\varkappa}{\nu}} \left[ v_1'(r) + \left( \frac{\nu+1}{r} - \frac{E\mu}{\nu} \right) v_1(r) \right].$$

Portant dans cette formule l'expression de $v_1(r)$, on obtient

$$v_2(r) = x^{-\nu-1} e^{-x/2} y(x),$$

où $y(x)$ est un polynôme de degré $n$. Pour définir $y(x)$, établissons d'abord l'équation pour $v_2(r)$ en éliminant $v_1(r)$ entre (31) et (32):

$$v_2'' + \frac{2}{r} v_2' + \frac{(E^2-1) r^2 + 2E\mu r + \nu(1-\nu)}{r^2} v_2 = 0, \qquad (38)$$

qui nous conduira à l'équation différentielle pour $y(x)$:

$$xy'' + (2\nu - x) y' + ny = 0. \qquad (39)$$

L'équation (39) est une équation du type hypergéométrique. Sa seule solution polynomiale est le polynôme de Laguerre $y(x) = B_n L_n^{2\nu-1}(x)$, d'où

$$v_2(r) = B_n x^{\nu-1} e^{-x/2} L_n^{2\nu-1}(x). \qquad (40)$$

On s'assure sans difficulté que cette formule renferme, comme cas particulier pour $n = 0$, la solution précédemment obtenue pour $E = -\nu/\varkappa$.

Pour établir la relation entre les constantes $A_n$ et $B_n$ dans (37) et (40), confrontons le comportement du premier et du second mem-

bres de l'égalité (31) pour $r \to 0$. Utilisant la formule

$$L_n^\alpha(0) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)},$$

on trouve

$$2a\nu A_n L_{n-1}^{2\nu+1}(0) = -2a(\nu+1) A_n L_{n-1}^{2\nu+1}(0) + \left(1 + \frac{E\varkappa}{\nu}\right) B_n L_n^{2\nu-1}(0),$$

d'où

$$A_n = \frac{\nu + E\varkappa}{an(n+2\nu)} B_n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Puisque

$$n(n+2\nu) = (n+\nu)^2 - \nu^2 = \frac{E^2\mu^2}{a^2} - \nu^2 = \frac{E^2\varkappa^2 - \nu^2}{a^2},$$

on a

$$A_n = \frac{a}{E\varkappa - \nu} B_n.$$

Connaissant les fonctions $v_1(r)$ et $v_2(r)$, on cherche $f(r)$ et $g(r)$:

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{2\nu(\varkappa-\nu)} \begin{pmatrix} \mu & \varkappa-\nu \\ \varkappa-\nu & \mu \end{pmatrix}.$$

Aussi

$$f(r) = \frac{B_n}{2\nu(\varkappa-\nu)} x^{\nu-1} e^{-x/2} [f_1 x L_{n-1}^{2\nu+1}(x) + f_2 L_n^{2\nu-1}(x)],$$

$$g(r) = \frac{B_n}{2\nu(\varkappa-\nu)} x^{\nu-1} e^{-x/2} [g_1 x L_{n-1}^{2\nu+1}(x) + g_2 L_n^{2\nu-1}(x)],$$

où

$$f_1 = \frac{a\mu}{E\varkappa-\nu}, \quad f_2 = \varkappa - \nu, \quad g_1 = \frac{a(x-\nu)}{E\varkappa-\nu}, \quad g_2 = \mu;$$

$$a = \sqrt{1-E^2}, \quad E = E_n = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\mu}{n+\nu}\right)^2}}.$$

Les formules de $f(r)$ et de $g(r)$ restent valables aussi pour $n = 0$, auquel cas il convient d'annuler formellement les termes en $L_{n-1}^{2\nu+1}(x)$.

Calculons le coefficient de normalisation $B_n$ à partir de la condition de normalisation (24). On a

$$\int_0^\infty r^2 [f^2(r) + g^2(r)]\, dr =$$

$$= \frac{B_n^2}{4\nu^2(\varkappa-\nu)^2(2a)^3} \int_0^\infty e^{-x} x^{2\nu} \{[f_1 x L_{n-1}^{2\nu+1}(x) + f_2 L_n^{2\nu-1}(x)]^2 +$$

$$+ [g_1 x L_{n-1}^{2\nu+1}(x) + g_2 L_n^{2\nu-1}(x)]^2\}\, dx = 1.$$

Dans nos calculs, nous serons amenés à considérer deux types d'intégrales :

$$J_1 = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha+1} [L_n^\alpha(x)]^2 \, dx,$$

$$J_2 = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha} L_{n-1}^\alpha(x) \, L_n^{\alpha-2}(x) \, dx.$$

L'intégrale $J_1$ se laisse exprimer à l'aide du carré de la norme

$$d_n^2 = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha} [L_n^\alpha(x)]^2 \, dx = \frac{1}{n!} \Gamma(n+\alpha+1)$$

en faisant intervenir la relation de récurrence

$$xL_n^\alpha(x) = -(n+1) L_{n+1}^\alpha(x) + (2n+\alpha+1) L_n^\alpha(x) - (n+\alpha) L_{n-1}^\alpha(x)$$

et la propriété d'orthogonalité

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha} L_n^\alpha(x) \, L_m^\alpha(x) \, dx = 0 \quad (m \neq n).$$

D'où

$$J_1 = (2n+\alpha+1) \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha} [L_n^\alpha(x)]^2 \, dx = \frac{1}{n!} (2n+\alpha+1) \, \Gamma(n+\alpha+1).$$

Pour calculer l'intégrale $J_2$, il suffit de développer le polynôme $L_n^{\alpha-2}(x)$ suivant les polynômes $L_k^\alpha(x)$ :

$$L_n^{\alpha-2}(x) = c_1 L_n^\alpha(x) + c_2 L_{n-1}^\alpha(x) + \ldots$$

Les coefficients $c_1$, $c_2$ s'obtiennent sans peine en identifiant les coefficients de $x^n$ et de $x^{n-1}$ dans les deux membres de cette égalité :

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -2.$$

Il vient alors

$$J_2 = -2 \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha} [L_{n-1}^\alpha(x)]^2 \, dx = -2 \frac{\Gamma(n+\alpha)}{(n-1)!}.$$

Aussi

$$B_n = 2a^2 \sqrt{\frac{(\varkappa-\nu)(E\varkappa-\nu)\, n!}{\mu \Gamma(n+2\nu)}}.$$

Remarquons que le facteur de normalisation $B_n$ conserve sa forme aussi pour $n = 0$.

Il vient finalement

$$\begin{pmatrix} f(r) \\ g(r) \end{pmatrix} = \frac{a^2}{\nu}\sqrt{\frac{(E\varkappa-\nu)\,n\,!}{\mu(\varkappa-\nu)\,\Gamma(n+2\nu)}}\,x^{\nu-1}e^{-x/2}\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} xL_{n-1}^{2\nu+1}(x) \\ L_n^{2\nu-1}(x) \end{pmatrix}, \tag{41}$$

où

$$f_1 = \frac{a\mu}{E\varkappa-\nu}, \quad f_2 = \varkappa-\nu, \quad g_1 = \frac{a(\varkappa-\nu)}{E\varkappa-\nu}, \quad g_2 = \mu.$$

Pour $n = 0$ on admet que $xL_{n-1}^{2\nu+1}(x) = 0$.

Considérons le passage à la limite non relativiste. Dans ce cas $\mu \approx Z/137$ est une quantité très faible. Evaluons les ordres de petitesse des autres quantités pour $\mu \to 0$. On a

$$E \approx 1-\mu^2/(2N^2) \quad (N = n+\nu),$$

$$a = \sqrt{1-E^2} \approx \mu/N, \quad \nu - |\varkappa| \approx -\mu^2/(2\,|\varkappa|).$$

Evaluons à présent l'ordre de petitesse des coefficients $f_1$, $f_2$ et $g_1$, $g_2$ devant $\mu$.

1) Soit $l = j - 1/2$. On a alors $\varkappa = -(l+1)$, $\varkappa - \nu \approx 2\varkappa$, $E\varkappa - \nu \approx 2\varkappa$, donc

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mu^2 & 1 \\ \mu & \mu \end{pmatrix}.$$

2) Soit $l = j + 1/2$. On a alors $\varkappa = l$, $\varkappa - \nu \approx \frac{1}{2l}\mu^2$, $E\varkappa - \nu =$
$= (E-1)\varkappa + (\varkappa - \nu) \approx \frac{\mu^2}{2lN^2}(N^2 - l^2)$, d'où

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \mu^2 \\ \mu & \mu \end{pmatrix}.$$

On voit d'ici que $|g(r)| \ll |f(r)|$ dans tous les cas, tandis que

$$f(r) \approx \pm 2\mu^{3/2}\sqrt{\frac{(N-l-1)\,!}{(N+l)!}}\,x^l e^{-x/2} L_{N-l-1}^{2l+1}(x). \tag{42}$$

Le signe positif correspond à $l = j + 1/2$, et le signe négatif à $l = j - 1/2$. Le nombre $N = n + \nu$ est égal dans le cas non relativiste à $n + |\varkappa| = n + |j + 1/2|$; il correspond au nombre quantique principal pour les solutions de l'équation de Schrödinger. L'expression (42) de $f(r)$ se confond exactement avec la solution correspondante de l'équation de Schrödinger.

Il est intéressant de noter qu'en mettant les fonctions $f(r)$, $g(r)$ sous la forme (41), nous facilitons considérablement le passage à la limite non relativiste, car, pour $\mu \to 0$, l'un des coefficients $f_1$, $f_2$, $g_1$, $g_2$ croît brusquement par rapport aux trois autres. Au contraire,

dans la littérature existante, les fonctions $f(r)$, $g(r)$ sont traditionnellement représentées avec des coefficients de même ordre de petitesse. On est donc amené, afin d'établir la correspondance entre la solution de l'équation de Schrödinger et la limite non relativiste, à faire intervenir accessoirement les relations de récurrence pour les fonctions hypergéométriques.

Les polynômes de Laguerre figurant dans les expressions de $f(r)$ et de $g(r)$ se laissent définir à l'aide des fonctions hypergéométriques dégénérées, en appliquant la relation connue

$$L_n^{\alpha}(x)=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)}F(-n,\ \alpha+1,\ x).$$

La représentation (41) devient alors

$$\begin{pmatrix} f(r) \\ g(r) \end{pmatrix}=D_n x^{\nu-1}e^{-x/2}\begin{pmatrix} \bar{f}_1 & \bar{f}_2 \\ \bar{g}_1 & \bar{g}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} xF(-n+1,\ 2\nu+2,\ x) \\ F(-n,\ 2\nu,\ x) \end{pmatrix},$$

où

$$D_n=\frac{1}{\nu\Gamma(2\nu+2)}\sqrt{\frac{(E\varkappa-\nu)\,\Gamma(n+2\nu)}{\mu(\varkappa-\nu)\,n!}},$$

$$\bar{f}_1=a\mu(E\varkappa+\nu),\qquad \bar{f}_2=2\nu a^2(2\nu+1)(\varkappa-\nu),$$

$$\bar{g}_1=a(\varkappa-\nu)(E\varkappa+\nu),\quad \bar{g}_2=2\mu\nu a^2(2\nu+1).$$

Les expressions ainsi obtenues de $f(r)$ et de $g(r)$ restent aussi vraies, à un facteur de normalisation près, pour les valeurs du spectre continu, à condition de prendre, au lieu des $n$ entiers, une constante $n=n(E)$ liée à la valeur donnée de $E$ par la relation (36), i.e.

$$n=\frac{\mu E}{i\sqrt{E^2-1}}-\nu,\quad E>1.$$

Nous venons d'examiner quelques problèmes fondamentaux de mécanique quantique. Bon nombre de problèmes modèles de mécanique quantique se laissent résoudre par les mêmes méthodes.

**4. Coefficients de Clebsch-Gordan et leur relation avec les polynômes de Hahn.** On apprend dans le cours de mécanique quantique que si le hamiltonien d'un système physique est invariant dans toute rotation du système de coordonnées, l'opérateur carré du moment angulaire et l'opérateur projection du moment sur une direction déterminée (par exemple sur l'axe des $z$) commutent avec le hamiltonien du système. Cela signifie qu'il existe des états où la fonction d'onde $\psi$ du système est fonction propre des opérateurs indiqués qui commutent entre eux. Il serait donc intéressant d'examiner plus en détail les propriétés des opérateurs en question.

Désignons l'opérateur moment angulaire et ses projections sur les axes de coordonnées en termes de la constante de Planck $\hbar$ par

$J$ et $J_x$, $J_y$, $J_z$ respectivement. Les opérateurs $J_x$, $J_y$, $J_z$ vérifient les relations de commutation suivantes:

$$\left.\begin{aligned} J_xJ_y - J_yJ_x &= iJ_z, \\ J_yJ_z - J_zJ_y &= iJ_x, \\ J_zJ_x - J_xJ_z &= iJ_y. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Il ressort de ces relations que les opérateurs $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ et $J_z$ commutent et possèdent un système commun de fonctions propres $\psi_{jm}$ qui vérifient les équations

$$\left.\begin{aligned} J^2\psi_{jm} &= j(j+1)\,\psi_{jm}, \\ J_z\psi_{jm} &= m\psi_{jm}, \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

$$J_{\pm}\psi_{jm} = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\,\psi_{j,\,m\pm 1}. \tag{45}$$

Ici $J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$, le système de fonctions $\{\psi_{jm}\}$ est orthonormé, le nombre quantique $j$ ne peut prendre que des valeurs entières ou demi-entières négatives, tandis que le nombre quantique $m$ peut prendre les valeurs $m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j$.

Un des problèmes importants de mécanique quantique est celui d'addition de deux moments angulaires. Soit un système physique constitué de deux sous-systèmes dont les opérateurs moments angulaires $J_1$ et $J_2$ commutent et dont les états se définissent par les fonctions d'onde $\psi_{j_1m_1}$ et $\psi_{j_2m_2}$. Dans ce cas l'opérateur $J = J_1 + J_2$ est celui du moment total du système et vérifie à ce titre les relations de commutation (43). Il existe donc des fonctions d'onde $\Phi_{jm}$ des opérateurs $J^2$ et $J_z$ qui vérifient les relations (44), (45). Il s'agit d'exprimer les fonctions $\Phi_{jm}$ à l'aide des fonctions connues $\psi_{j_1m_1}$ et $\psi_{j_2m_2}$.

Ce problème sera traité à l'appui des considérations suivantes. On montre sans difficulté que l'opérateur $J_z = J_{1z} + J_{2z}$ admet comme fonctions propres pour la valeur propre $m = m_1 + m_2$ les produits $\psi_{j_1m_1}\psi_{j_2m_2}$. Pour construire la fonction $\Phi_{jm}$, on doit faire, pour un $m = m_1 + m_2$ donné, une combinaison linéaire des produits $\psi_{j_1m_1}\psi_{j_2m_2}$ telle qu'elle soit fonction propre de $J^2$. Puisque l'opérateur $J^2$ commute avec les opérateurs $J_1^2$ et $J_2^2$, on peut admettre que les nombres quantiques $j_1$ et $j_2$ sont fixés dans cette combinaison linéaire, i.e.

$$\Phi_{jm} = \sum_{m_1,\,m_2} \langle j_1m_1j_2m_2 \mid jm\rangle\, \psi_{j_1m_1}\psi_{j_2m_2}. \tag{46}$$

Les quantités $\langle j_1m_1j_2m_2 \mid jm\rangle$ sont appelées *coefficients de Clebsch-Gordan*.

Remarquant que $m = m_1 + m_2$ et

$$-j_1 \leqslant m_1 \leqslant j_1, \quad -j_2 \leqslant m_2 \leqslant j_2, \quad -j \leqslant m \leqslant j,$$

le nombre quantique $j$ peut prendre les valeurs

$$|j_1 - j_2| \leqslant j \leqslant j_1 + j_2. \tag{47}$$

Aussi nous supposerons par la suite que les coefficients de Clebsch-Gordan sont nuls chaque fois que les restrictions indiquées pour $m_1$, $m_2$, $m$, $j$ ne sont pas respectées.

Du fait que les fonctions propres $\Phi_{jm}$, $\psi_{j_1m_1}$, $\psi_{j_2m_2}$ sont orthonormées, la condition de normalisation des coefficients de Clebsch-Gordan s'écrit comme suit:

$$\sum_{m_1,\, m_2} |\langle j_1m_1j_2m_2|jm\rangle|^2 = 1. \tag{48}$$

Les coefficients de Clebsch-Gordan jouent un rôle important en mécanique quantique. Ils permettent par exemple de chercher les fonctions d'onde d'un système compliqué (tel qu'un noyau, un atome, une molécule). La théorie des coefficients de Clebsch-Gordan est suffisamment développée et exposée dans un grand nombre d'ouvrages (voir par exemple le renvoi en bas de la page 260). Sans chercher à donner un exposé complet de la théorie des coefficients de Clebsch-Gordan, nous nous proposons de les mettre sous forme explicite par une méthode très simple et de mettre en évidence le lien qui existe entre ces coefficients et les polynômes orthogonaux classiques d'une variable discrète *).

Nous nous baserons sur les relations (45) concernant les fonctions $\Phi_{jm}$, $\psi_{j_1m_1}$ et $\psi_{j_2m_2}$. Appliquant l'opérateur $J_\pm = J_{1\pm} + J_{2\pm}$ aux deux membres de l'égalité (46), nous obtenons les relations de récurrence suivantes pour les coefficients de Clebsch-Gordan:

$$\alpha^j_{m-1} \langle j_1m_1j_2m_2|j,\ m-1\rangle =$$
$$= \alpha^{j_1}_{m_1} \langle j_1,\ m_1+1,\ j_2m_2|jm\rangle + \alpha^{j_2}_{m_2} \langle j_1m_1j_2,\ m_2+1|jm\rangle, \tag{49}$$
$$\alpha^j_m \langle j_1m_1j_2m_2|j,\ m+1\rangle =$$
$$= \alpha^{j_1}_{m_1-1} \langle j_1,\ m_1-1,\ j_2m_2|jm\rangle + \alpha^{j_2}_{m_2-1} \langle j_1m_1j_2,\ m_2-1|jm\rangle. \tag{50}$$

Ici $\alpha^j_m = \sqrt{(j-m)(j+m+1)}$.

Réduisons les relations de récurrence (49) et (50) à une forme plus simple. Il suffit de remarquer que le changement de l'un quelconque des indices $m_1$, $m_2$, $m$ dans le coefficient $\langle j_1m_1j_2m_2 \mid jm\rangle$ de

---

*) L'analogie entre les coefficients de Clebsch-Gordan et les polynômes de Jacobi a été notée pour la première fois dans [6]. A ce sujet voir également l'article récent de A. Nikiforov, S. Souslov, V. Ouvarov *Polynômes orthogonaux classiques d'une variable discrète en théorie des représentations des groupes*, publié dans le Recueil *Méthodes de la théorie des groupes en physique*, t. II, pp. 534-542, Ed. « Naouka », 1983.

(49) s'accompagne de l'apparition d'un facteur repéré par le même indice. Aussi, pour $j_1$, $j_2$, $j$ fixes, la transformation

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 \mid jm \rangle = A(m_1)\,B(m_2)\,C(m)\,u_m(m_1, m_2) \tag{51}$$

permet-elle donc, par un choix approprié des facteurs $A$, $B$, $C$, d'obtenir l'équation pour la fonction $u_m(m_1, m_2)$ aux coefficients constants arbitraires:

$$cu_{m-1}(m_1, m_2) = au_m(m_1+1, m_2) + bu_m(m_1, m_2+1). \tag{52}$$

Cela devient possible sous les conditions suivantes:

$$\alpha^{j_1}_{m_1}\frac{A(m_1+1)}{A(m_1)} = a, \quad \alpha^{j_2}_{m_2}\frac{B(m_2+1)}{B(m_2)} = b, \quad \alpha^{j}_{m-1}\frac{C(m+1)}{C(m)} = c. \tag{53}$$

Avec la notation

$$\beta^j_m = \prod_{s=-j}^{m-1} \alpha^j_s \quad (\beta^j_{-j} = 1),$$

les solutions particulières des équations (53) peuvent s'écrire

$$A(m_1) = \frac{a^{j_1+m_1}}{\beta^{j_1}_{m_1}}, \quad B(m_2) = \frac{b^{j_2+m_2}}{\beta^{j_2}_{m_2}}, \quad C(m) = \frac{\beta^j_m}{c^{j+m}}. \tag{54}$$

Puisque les nombres $m_1$ et $m_2$ dans le coefficient $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 \mid jm \rangle$ sont liés par la condition $m_1 + m_2 = m$, nous désignerons par la suite la quantité $u_m(m_1, m_2) = u_m(m_1, m - m_1)$ par $u_m(m_1)$. Dans ces notations l'équation (52) s'écrira

$$cu_{m-1}(m_1) = au_m(m_1+1) + bu_m(m_1). \tag{55}$$

Il est bon de poser $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$, afin que (55) devienne

$$u_{m-1}(m_1) = \Delta u_m(m_1), \tag{56}$$

où

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x),$$

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle = (-1)^{j_2+m_2}\frac{\beta^j_m}{\beta^{j_1}_{m_1}\beta^{j_2}_{m_2}}u_m(m_1) \quad (m_2 = m - m_1). \tag{57}$$

D'une façon parfaitement analogue, la relation de récurrence (50) se laisse réduire à l'égalité

$$v_{m+1}(m_1) = \nabla v_m(m_1), \tag{58}$$

où

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-1),$$

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle = (-1)^{j_1+m_1}\frac{\beta^{j_1}_{m_1}\beta^{j_2}_{m_2}}{\beta^j_m}v_m(m_1) \quad (m_2 = m - m_1). \tag{59}$$

Conformément à l'équation (56) on a

$$u_m(m_1) = \Delta u_{m+1}(m_1) = \Delta^2 u_{m+2}(m_1) = \ldots = \Delta^{j-m} u_j(m_1). \tag{60}$$

Pour déterminer $u_j(m_1)$, nous appliquerons l'équation (58) en mettant $m = j$. Puisque

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 \mid j,\ j+1\rangle = 0,$$

on a $v_{j+1}(m_1) = 0$. En vertu de (58), la quantité $v_j(m_1)$ ne dépend donc pas de $m_1$, i.e. $v_j(m_1) = C$, où la constante $C$ ne peut dépendre que de $j_1$, $j_2$, $j$. D'où l'on déduit en vertu de (57) et (59)

$$u_j(m_1) = (-1)^{j_2+j-m_1} \frac{\beta^{j_1}_{m_1}\beta^{j_2}_{j-m_1}}{\beta^j_j} \langle j_1 m_1 j_2,\ j-m_1 | jj\rangle =$$

$$= (-1)^{j_1+j_2+j} C \left(\frac{\beta^{j_1}_{m_1}\beta^{j_2}_{j-m_1}}{\beta^j_j}\right)^2. \tag{61}$$

On obtient donc, à partir de (57) et de (60),

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle =$$

$$= (-1)^{j_1+j_2+j+j_2+m_2} C \frac{\beta^j_m}{(\beta^j_j)^2 \beta^{j_1}_{m_1}\beta^{j_2}_{m_2}} \Delta^{j-m} [(\beta^{j_1}_{m_1}\beta^{j_2}_{j-m_1})^2]. \tag{62}$$

Puisque

$$\beta^j_m = \left[\frac{(2j)!\,(j+m)!}{(j-m)!}\right]^{1/2},$$

l'expression (62) des coefficients de Clebsch-Gordan peut s'écrire autrement:

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle = (-1)^{j_2+m_2} D \left[\frac{(j_1-m_1)!\,(j_2-m_2)!\,(j+m)!}{(j_1+m_1)!\,(j_2+m_2)!\,(j-m)!}\right]^{1/2} \times$$

$$\times \Delta^{j-m} \left[\frac{(j_1+m_1)!\,(j_2+j-m_1)!}{(j_1-m_1)!\,(j_2-j+m_1)!}\right], \tag{63}$$

où $D$ est une constante qui dépend de $j_1$, $j_2$, $j$. Sa valeur $|D|$ se déduit de la condition de normalisation (48) pour $m = j$:

$$|D|^2 (2j)! \sum_{m_1} \frac{(j_1+m_1)!\,(j_2+j-m_1)!}{(j_1-m_1)!\,(j_2-j+m_1)!} = 1. \tag{64}$$

On voit de (63) et de (64) que le coefficient de Clebsch-Gordan peut être défini au facteur de phase $e^{i\delta}$ près, ce dernier étant généralement choisi sous la condition supplémentaire

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle|_{m_1=j_1,\ m=j} \geqslant 0,$$

équivalente à la condition

$$D=(-1)^{j-j_1+j_2}|D|.$$

La somme en $m_1$ dans (64) se calcule par la méthode appliquée dans le § 12, n° 5 au calcul de la norme des polynômes de Hahn. Il vient

$$D=(-1)^{j-j_1+j_2}\left[\frac{(2j+1)(j_1+j_2-j)!}{(j_1+j_2+j+1)!(j+j_1-j_2)!(j-j_1+j_2)!}\right]^{1/2}. \quad (65)$$

Explicitant l'opérateur de la différence finie que l'on trouve dans (63) d'après la formule

$$\Delta^n f(m_1)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\frac{n!}{k!(n-k)!}f(m_1+k),$$

on obtient l'expression des coefficients de Clebsch-Gordan sous forme de la somme d'un nombre fini de termes:

$$\langle j_1m_1j_2m_2|jm\rangle=(-1)^{j_1-m_1}\times$$
$$\times\left[\frac{(2j+1)(j_1+j_2-j)!(j-m)!(j+m)!(j_1-m_1)!(j_2-m_2)!}{(j_1+j_2+j+1)!(j+j_1-j_2)!(j-j_1+j_2)!(j_1+m_1)!(j_2+m_2)!}\right]^{1/2}\times$$
$$\times\sum_k\frac{(-1)^k(j_1+m_1+k)!(j_2+j-m_1-k)!}{k!(j-m-k)!(j_1-m_1-k)!(j_2-j+m_1+k)!} \quad (66)$$

(nous avons profité de la parité de $2(j+j_2-j_1)$).

De la formule (66) on déduit les relations de symétrie suivantes pour les coefficients de Clebsch-Gordan:

$$\langle j_1m_1j_2m_2|jm\rangle=(-1)^{j_1+j_2-j}\langle j_1,\ -m,\ j_2,\ -m_2|j,\ -m\rangle; \quad (67)$$

$$\langle j_1m_1j_2m_2|jm\rangle=(-1)^{j_1+j_2-j}\langle j_2m_2j_1m_1|jm\rangle; \quad (68)$$

$$\langle j_1m_1j_2m_2|jm\rangle=\Big\langle\frac{1}{2}(j_1+j_2+m),\quad \frac{1}{2}(j_1-j_2+m_1-m_2),$$
$$\frac{1}{2}(j_1+j_2-m),\quad \frac{1}{2}(j_1-j_2-m_1+m_2)|j,\ j_1-j_2\Big\rangle \quad (69)$$

(symétrie de Regge).

La formule (63) permet de dégager le lien entre les coefficients de Clebsch-Gordan et les polynômes de Hahn $h_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ en faisant intervenir la formule de Rodrigues (22) du § 12:

$$\left.\begin{aligned}&h_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{B_n}{\rho(x)}\nabla^n\rho_n(x),\\ &\text{où}\\ &B_n=\frac{(-1)^n}{n!},\quad \rho(x)=\frac{(N+\alpha-1-x)!(\beta+x)!}{x!(N-1-x)!},\\ &\rho_n(x)=\frac{(N+\alpha-1-x)!(\beta+n+x)!}{x!(N-n-1-x)!}.\end{aligned}\right\} \quad (70)$$

Pour établir le lien en question, posons dans (63) $x = j_1 - m_1$. Puisque

$$\Delta_{m_1} f(m_1) = f(m_1 + 1) - f(m_1) = f(j_1 - x + 1) - f(j_1 - x) = -\nabla_x f(j_1 - x),$$

on a

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle = (-1)^x |D| \left[\frac{(j+m)!}{(j-m)!}\right]^{1/2} \left[\frac{x!\,(j_1+j_2-m-x)!}{(2j_1-x)!\,(j_2-j_1+m+x)!}\right] \times \nabla^{j-m}\left[\frac{(2j_1-x)!\,(j-j_1+j_2+x)!}{x!\,(j_1+j_2-j-x)!}\right]. \quad (71)$$

En confrontant les formules (70) et (71), on remarque que les coefficients de Clebsch-Gordan se laissent exprimer en fonction des polynômes de Hahn $h_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ pour $n = j - m$, $N = j_1 + j_2 - m + 1$, $\alpha = j_1 - j_2 + m$, $\beta = j_2 - j_1 + m$:

$$\sqrt{\rho(x)}\, h_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^{j_1-m_1+j-m}}{|D|\sqrt{(j-m)!\,(j+m)!}} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle.$$

On s'assure aisément que

$$|D|\sqrt{(j-m)!\,(j+m)!} = \frac{1}{d_n},$$

où $d_n^2$ est le carré de la norme des polynômes de Hahn.

Nous obtenons en définitive un lien fort simple entre les coefficients de Clebsch-Gordan et les polynômes de Hahn:

$$(-1)^{j_1-m_1+j-m} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle = \frac{1}{d_n} \sqrt{\rho(x)}\, h_n^{(\alpha,\beta)}(x) \quad (72)$$

pour

$$x = j_1 - m_1, \quad n = j - m, \quad N = j_1 + j_2 - m + 1,$$
$$\alpha = m + m', \quad \beta = m - m' \quad (m' = j_1 - j_2),$$
$$\rho(x) = \frac{(j_1+m_1)!\,(j_2+m_2)!}{(j_1-m_1)!\,(j_2-m_2)!}.$$

La relation (72) a été établie pour les restrictions $\alpha > -1$, $\beta > -1$. Pour qu'elles soient vérifiées, il suffit de demander que

$$j_1 \geqslant j_2, \quad m \geqslant j_1 - j_2. \quad (73)$$

Les relations de symétrie (67) à (69) permettent de satisfaire à ces dernières inégalités pour n'importe quel coefficient de Clebsch-Gordan.

Les coefficients de Clebsch-Gordan $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle$ sont distincts de zéro si le choix des nombres quantiques est soumis aux conditions

$$|j_1 - j_2| \leqslant j \leqslant j_1 + j_2, \quad m = m_1 + m_2. \quad (74)$$

Les conditions (74) sont nécessaires. Leur non-respect annule les coefficients de Clebsch-Gordan. Il existe par ailleurs des cas où, bien que les conditions (74) soient vérifiées, les coefficients s'annulent pour certaines valeurs particulières des moments et des projections. Vu l'existence de telles racines, on est amené à interdire certaines transitions quantiques dont l'amplitude est proportionnelle aux coefficients de Clebsch-Gordan nuls.

La relation entre les coefficients de Clebsch-Gordan et les polynômes de Hahn permet de se faire une idée de ce que sont les racines de ces coefficients. On a vu plus haut qu'il est possible de réduire tout coefficient de Clebsch-Gordan, en faisant intervenir les relations de symétrie, à un coefficient qui se laisse exprimer en fonction d'un polynôme de Hahn $h_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ d'après la formule (72). Toutes les racines des coefficients de Clebsch-Gordan sont celles du polynôme de Hahn (72) à l'un des points $x = x_i = 0, 1, \ldots, N-1$.

*Exemple.* Considérons les racines du coefficient $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 \mid j, j-1\rangle$ auquel correspond le polynôme de Hahn du premier degré

$$h_1^{(\alpha,\beta)}(x) = -\tau(x) = (\alpha+\beta+2)\,x - (\beta+1)(N-1) =$$
$$= 2jx - (j_2 - j_1 + j)(j_1 + j_2 - j + 1).$$

Les conditions (74) étant respectées, le coefficient $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 \mid j, j-1\rangle$ s'annule lorsque la racine du polynôme $h_1(x)$ se situe en $x = j_1 - m_1$, ce qui implique la condition

$$j(m_1 - m_2) = (j_1 - j_2)(j_1 + j_2 + 1).$$

Une telle racine est admise par exemple par les coefficients $\langle 1, 0, 1, 0 \mid 1, 0\rangle$ et $\langle 3, 2, 2, 0 \mid 3, 2\rangle$.

A l'aide de la relation (72) on arrive à dégager une série de propriétés des coefficients de Clebsch-Gordan consécutives aux propriétés analogues des polynômes de Hahn. A titre d'exemple, nous allons établir une représentation asymptotique commode des coefficients de Clebsch-Gordan $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 \mid jm\rangle$ pour $j_1 \to \infty$, $j_2 \to \infty$ et des valeurs fixes de $m' = j_1 - j_2$, $j$, $m$, en posant $m' \geqslant 0$ et $m \geqslant m'$. Pour les polynômes de Hahn $h_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, cela correspond à $N \to \infty$ et à des valeurs fixes de $\alpha$, $\beta$ et $n$. Puisque pour $z \to \infty$ on a $(z+a)! \approx z^a z!$, on obtient la représentation asymptotique suivante du poids $\rho(x)$ pour les polynômes de Hahn lorsque $N \to \infty$ :

$$\rho(x) \approx \left(\frac{N}{2}\right)^{\alpha+\beta} (1-s)^\alpha (1+s)^\beta, \quad \text{où } x = \frac{N}{2}(1+s).$$

On a vu en outre dans le § 12, n° 6, que pour $N \to \infty$ on a

$$h_n^{(\alpha,\beta)}(x) \approx N^n P_n^{(\alpha,\beta)}(s).$$

On a donc, pour $j_1 \to \infty$ et $j$, $m$, $j_1 - j_2$ fixes:

$$(-1)^{j_1-m_1+j-m}\sqrt{j_1+j_2-m+1}\,\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle \approx$$

$$\approx \frac{1}{2^m}\sqrt{\frac{(2j+1)(j-m)!\,(j+m)!}{(j-m')!\,(j+m')!}}\,(1-s)^{\frac{m+m'}{2}} \times$$

$$\times (1+s)^{\frac{m-m'}{2}}\,P_{j-m}^{(m+m',\,m-m')}(s)$$

$$\left(s=\frac{(j_1-m_1)-(j_2-m_2)-1}{(j_1-m_1)+(j_2-m_2)+1},\quad m \geqslant m' \geqslant 0,\quad m'=j_1-j_2\right).$$

Si, dans ces formules, le nombre $n = j - m$ est suffisamment élevé, les polynômes de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ admettent la représentation asymptotique (18) du § 18 pour $n \to \infty$, ce qui nous donne

$$(-1)^{j_1-m_1+j-m}\sqrt{j_1+j_2-m+1}\,\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle \approx$$

$$\approx \sqrt{\frac{2(2j+1)(j-m-1)!\,(j+m)!}{\pi\,(j-m')!\,(j+m')!}}\;\frac{\cos\left[\left(j+\frac{1}{2}\right)\theta-\left(m+m'+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]}{\sqrt{\sin\theta}},$$

où

$$\cos\theta=\frac{(j_1-m_1)-(j_2-m_2)-1}{(j_1-m_1)+(j_2-m_2)+1},\quad m \geqslant m' \geqslant 0,\quad m'=j_1-j_2,$$

$$0<\delta \leqslant \theta \leqslant \pi-\delta.$$

# APPENDICE

## A. Fonction gamma

Une des plus simples, la fonction gamma est en même temps une des plus importantes fonctions spéciales. La connaissance de ses propriétés est essentielle pour l'étude des autres fonctions spéciales. En outre, beaucoup d'intégrales rencontrées en Analyse se laissent exprimer à l'aide de la fonction gamma. En particulier, les fonctions gamma permettent d'exprimer l'intégrale qui définit une fonction appelée fonction bêta.

**1. Définition des fonctions $\Gamma(z)$ et $B(u, v)$.** Les *fonctions gamma* $\Gamma(z)$ et *bêta* $B(u, v)$ sont définies par les expressions

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt, \quad \operatorname{Re} z > 0\,; \tag{1}$$

$$B(u, v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\, dt, \quad \operatorname{Re} u > 0, \quad \operatorname{Re} v > 0. \tag{2}$$

En vertu du théorème 2 du § 3, la fonction $\Gamma(z)$ reste analytique partout où elle est définie. En effet, l'intégrale (1) converge uniformément en $z$ dans le domaine $0 < \delta \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant A$ pour $A$ et $\delta$ quelconques, car

$$|e^{-t} t^{z-1}| \leqslant \begin{cases} t^{\delta-1} & \text{pour } 0 < t \leqslant 1, \\ e^{-t} t^{A-1} & \text{pour } t > 1 \end{cases}$$

et les intégrales $\int_0^1 t^{\delta-1}\, dt$ et $\int_1^\infty e^{-t} t^{A-1}\, dt$ sont convergentes.

On montre de même que $B(u, v)$ est fonction analytique de chacune des variables $u$, $v$ pour $\operatorname{Re} u > 0$, $\operatorname{Re} v > 0$.

La fonction bêta se laisse exprimer à l'aide de la fonction gamma. A cet effet, il suffit de calculer par deux procédés l'intégrale

$$I(u, v) = \int\int e^{-(\xi^2+\eta^2)} \xi^{2u-1} \eta^{2v-1}\, d\xi\, d\eta$$

dans laquelle l'intégration s'étend au domaine $\xi > 0$, $\eta > 0$. D'une part

$$I(u, v) = I(u)\, I(v),$$

où

$$I(u) = \int_0^\infty e^{-\xi^2} \xi^{2u-1}\, d\xi = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} t^{u-1}\, dt = \frac{1}{2} \Gamma(u).$$

D'autre part, on obtient en passant dans l'expression de $I(u, v)$ aux coordonnées polaires $\xi = r \cos \varphi$, $\eta = r \sin \varphi$ :

$$I(u, v) = \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2u+2v-1}\, dr \int_0^{\pi/2} \cos^{2u-1} \varphi \sin^{2v-1} \varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \Gamma(u+v) \int_0^{\pi/2} \cos^{2u-1} \varphi \sin^{2v-1} \varphi\, d\varphi.$$

L'intégrale suivant la variable $\varphi$ peut être exprimée à l'aide de la fonction bêta $B(u, v)$ en faisant le changement $\cos^2 \varphi = t$ :

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2u-1} \varphi \sin^{2v-1} \varphi\, d\varphi = \frac{1}{2} B(u, v).$$

Des deux expressions de $I(u, v)$, on tire finalement

$$B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\,\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}. \tag{3}$$

**2. Relations fonctionnelles.** La fonction $\Gamma(z)$ vérifie les relations fonctionnelles suivantes :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \tag{4}$$

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \tag{5}$$

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\,\Gamma(z+1/2) = \Gamma(1/2)\,\Gamma(2z). \tag{6}$$

Ces relations jouent un grand rôle dans les différentes transformations concernant la fonction gamma. La relation (5) est appelée *formule de complément*, et la relation (6), *formule de duplication* de la fonction gamma.

Pour démontrer les formules (4) à (6), nous les mettrons, à l'aide de (3), sous la forme de relations fonctionnelles pour la fonction bêta :

$$B(z, 1) = 1/z, \tag{7}$$

$$B(z, 1-z) = \pi/\sin \pi z, \tag{8}$$

$$2^{2z-1}B(z, z) = B(z, 1/2). \tag{9}$$

Les relations (7) à (9) se laissent établir par calcul direct de l'intégrale (2) pour la fonction bêta B $(u, v)$. Il vient

$$B(z, 1)=\int_0^1 t^{z-1}\,dt=\frac{1}{z},$$

et l'on retrouve (7).

Pour la relation (8), prenons dans (2) $u = z$ et $v = 1 - z$:

$$B(z, 1-z)=\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^{z-1}\frac{dt}{1-t}, \quad 0<\operatorname{Re} z<1.$$

Faisons le changement $s = t/(1 - t)$. Il vient alors

$$B(z, 1-z)=\int_0^\infty \frac{s^{z-1}}{1+s}\,ds.$$

L'intégrale obtenue se laisse calculer à l'aide de la théorie des rési-

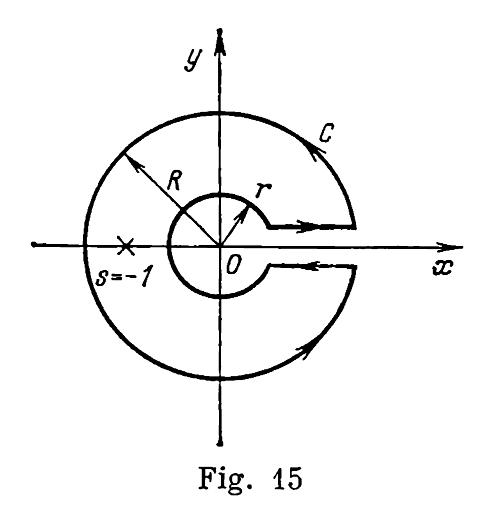



Fig. 15

dus. Au lieu d'intégrer le long de l'axe réel, nous ferons l'intégration suivant un contour fermé $C$ représenté sur la figure 15. La fonction

$$f(s)=\frac{s^{z-1}}{1+s} \quad (0<\arg s<2\pi)$$

n'admet à l'intérieur de $C$ qu'une seule singularité: un pôle pour $s = e^{i\pi}$. On a donc pour $R > 1$ (voir fig. 15)

$$\int_C f(s)\,ds=2\pi i \operatorname*{Res}_{s=e^{i\pi}} f(s)=-2\pi i e^{i\pi z}.$$

D'autre part, en vertu de la condition $0 < \operatorname{Re} z < 1$ les intégrales prises le long des cercles de rayons $r$ et $R$ tendent vers zéro quand $r \to 0$ et $R \to \infty$, tandis que l'intégrale prise le long du bord inférieur

de la coupure se distingue de l'intégrale le long du bord supérieur par le facteur $-e^{2\pi iz}$. On obtient donc pour $r \to 0$ et $R \to \infty$

$$B(z, 1-z)(1-e^{2\pi iz}) = -2\pi i e^{i\pi z},$$

expression équivalente à (8) pour $0 < \operatorname{Re} z < 1$.

Quant à la relation (9), elle se démontre en posant dans (2) $u = v = z$:

$$B(z, z) = \int_0^1 [t(1-t)]^{z-1}\, dt, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Puisque la parabole $y = t(1-t)$ est symétrique par rapport à la droite $t = 1/2$, on a

$$B(z, z) = 2\int_0^{1/2} [t(1-t)]^{z-1}\, dt,$$

d'où l'on tire après le changement $s = 4t(1-t)$

$$B(z, z) = \frac{1}{2^{2z-1}} \int_0^1 s^{z-1}(1-s)^{-1/2}\, ds = \frac{B(z, 1/2)}{2^{2z-1}},$$

expression équivalente à (9) pour $\operatorname{Re} z > 0$.

Les relations fonctionnelles (4) à (6) pour la fonction gamma sont démontrées.

Pour donner un exemple d application de ces relations, nous nous proposerons de calculer les valeurs de la fonction gamma $\Gamma(z)$ pour des valeurs entières et demi-entières de l'argument. Il ressort de (4) que

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

car $\Gamma(1) = 1$. On remarque que la fonction gamma généralise la notion de factorielle. Ensuite, posant dans (5) $z = 1/2$, on obtient

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Aussi la relation (6) peut-elle s'écrire

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2z). \tag{6a}$$

Posant dans cette relation $z = n + 1/2$, on obtient

$$\Gamma(n+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2n+1)}{2^{2n}\Gamma(n+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{n!}. \tag{10}$$

On peut obtenir le prolongement analytique de la fonction $\Gamma(z)$ sur le domaine $\operatorname{Re} z > -(n+1)$ en faisant intervenir la relation

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)(z+n)} \tag{11}$$

qui résulte de (4). Puisque $n$ est choisi de façon arbitraire, on obtient le prolongement analytique de $\Gamma(z)$ pour $z$ quelconque. La formule (11) montre que $\Gamma(z)$ *est une fonction analytique partout sauf en* $z = -n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, *points en lesquels la fonction* $\Gamma(z)$ *admet des pôles du premier ordre*, aux résidus

$$\operatorname*{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

En vertu du principe du prolongement analytique, les formules (4) à (6) restent vraies pour toute valeur de $z$ pour laquelle elles ont un

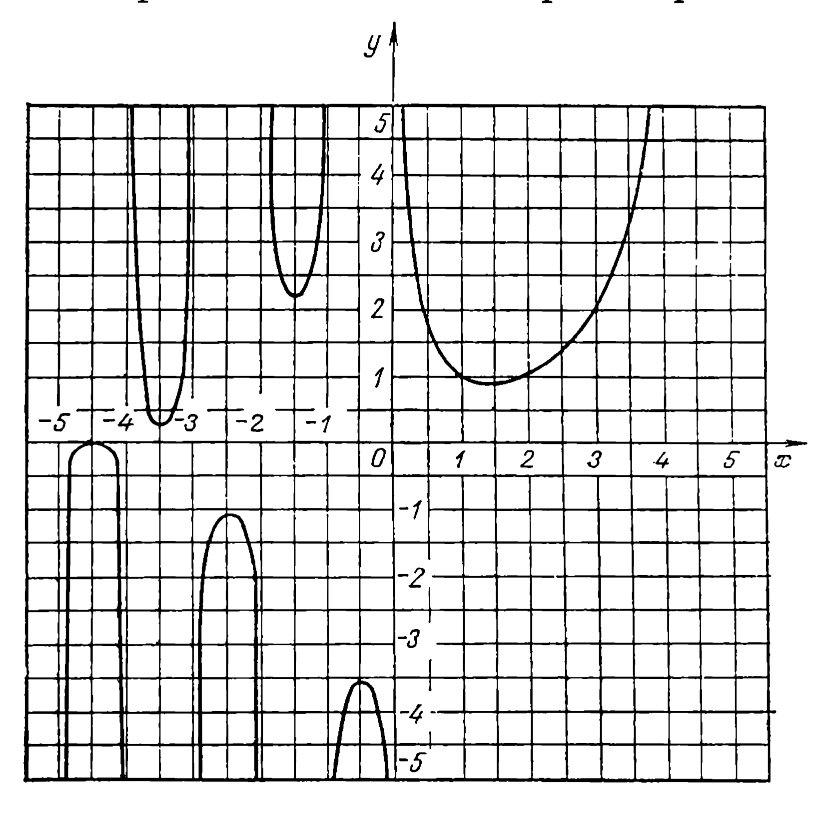



Fig. 16

sens. Le prolongement analytique de la fonction bêta s'obtient en faisant intervenir la relation (3).

Il ressort de la relation (5) que *la fonction* $\Gamma(z)$ *n'admet aucun zéro sur le plan de la variable complexe* $z$. Soit en effet $\Gamma(z_0) = 0$. Il est évident que $z_0 \neq n + 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, car $\Gamma(n+1) = n! \neq 0$. D'autre part,

$$\lim_{z \to z_0} \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z_0} \lim_{z \to z_0} \frac{1}{\Gamma(z)} = \infty,$$

ce qui est contradictoire avec l'analyticité de la fonction $\Gamma(1-z)$ pour $z \neq n + 1$.

La courbe représentative de la fonction $y = \Gamma(x)$ est donnée sur la figure 16.

**3. Dérivée logarithmique de la fonction gamma.** A côté de $\Gamma(z)$, on utilise aussi très largement la fonction

$$\psi(z)=\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

La fonction $\psi(z)$ reste analytique dans tout le plan complexe, à l'exception des points $z=-n$ $(n=0, 1, \ldots)$ en lesquels elle admet des pôles simples.

Des relations fonctionnelles pour la fonction gamma on tire les relations fonctionnelles suivantes pour la fonction $\psi(z)$:

$$\psi(z+1)=1/z+\psi(z), \tag{12}$$

$$\psi(z)=\psi(1-z)-\pi\operatorname{cotg}\pi z, \tag{13}$$

$$2\ln 2+\psi(z)+\psi(z+1/2)=2\psi(2z). \tag{14}$$

Indiquons une autre relation qui se laisse déduire facilement de (12):

$$\psi(z+n)=\psi(z)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z+k-1}. \tag{15}$$

Les relations (12) à (15) permettent de calculer $\psi(z)$ pour des valeurs entières et demi-entières de l'argument. Introduisons la notation

$$\psi(1)=\Gamma'(1)=-\gamma.$$

La quantité $\gamma$ est appelée *constante d'Euler* ($\gamma=0{,}577215\ldots$). Posant dans (14) $z=1/2$, on obtient

$$\psi(1/2)=-\gamma-2\ln 2.$$

Pour $z=1$ et $z=1/2$ la formule (15) donne

$$\psi(n+1)=-\gamma+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}, \tag{16}$$

$$\psi(n+1/2)=-\gamma-2\ln 2+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}. \tag{17}$$

De la représentation intégrale de la fonction bêta on déduit celle de la fonction $\psi(z)$. On a par définition

$$\psi(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Gamma(z)-\Gamma(z-\Delta z)}{\Gamma(z)\,\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\left[\frac{1}{\Delta z}-\frac{\Gamma(z-\Delta z)}{\Gamma(z)\,\Delta z}\right].$$

L'expression $\frac{\Gamma(z-\Delta z)}{\Gamma(z)\,\Delta z}$ se confond presque, pour des $\Delta z>0$ assez petits, avec la fonction bêta

$$B(z-\Delta z,\ \Delta z)=\frac{\Gamma(z-\Delta z)\,\Gamma(\Delta z)}{\Gamma(z)},$$

car

$$\lim_{\Delta z\to 0} \Delta z\Gamma(\Delta z) = \lim_{\Delta z\to 0} \Gamma(1+\Delta z) = 1.$$

Il y a intérêt à éliminer la quantité $1/\Delta z$ figurant dans la relation limite pour $\psi(z)$ en introduisant la différence $\psi(z) - \psi(1)$. On a

$$\psi(z) - \psi(1) = \psi(z) + \gamma = \lim_{\Delta z\to 0}\left[\frac{\Gamma(1-\Delta z)}{\Gamma(1)\,\Delta z} - \frac{\Gamma(z-\Delta z)}{\Gamma(1)\,\Delta z}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0} \frac{1}{\Delta z\Gamma(\Delta z)} [B(1-\Delta z,\ \Delta z) - B(z-\Delta z,\ \Delta z)] =$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0} \int_0^1 \frac{1-t^{z-1}}{1-t}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\Delta z} dt.$$

Faisant le passage à la limite sous le signe d'intégration, ce qui est légitime en vertu de la convergence uniforme de l'intégrale pour des $\Delta z$ suffisamment petits, on obtient une *représentation intégrale* de $\psi(z)$:

$$\psi(z) = -\gamma + \int_0^1 \frac{1-t^{z-1}}{1-t}\,dt, \quad \operatorname{Re} z > 0. \tag{18}$$

Changeant dans (18) $t$ en $e^{-t}$, on obtient une autre représentation intégrale très usitée:

$$\psi(z) = -\gamma + \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-zt}}{1-e^{-t}}\,dt, \quad \operatorname{Re} z > 0. \tag{19}$$

De la représentation intégrale (18) on peut déduire un *développement en série* fort simple de la fonction $\psi(z)$ en développant $1/(1-t)$ suivant les puissances de $t$ et en faisant l'intégration terme à terme:

$$\psi(z) = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z}\right). \tag{20}$$

4. **Représentations asymptotiques.** En établissant les représentations asymptotiques des fonctions $\Gamma(z)$ et $\psi(z)$, nous utiliserons les propriétés asymptotiques de l'intégrale de Laplace (voir Appendice B)

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\,dt.$$

Tout d'abord nous transformerons la représentation intégrale (19) de $\psi(z)$ de la façon suivante:

$$\psi(z) = -\gamma + \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-zt}}{t}\, dt + \int_0^\infty (e^{-t} - e^{-zt}) \left( \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt.$$

D'où

$$\psi(z) = \psi_0(z) - F(z),$$

où

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt,$$

$$f(t) = \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} = 1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1},$$

$$\psi_0(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-zt}}{t}\, dt - \gamma + F(1).$$

La fonction $\psi_0(z)$ se laisse exprimer à l'aide de fonctions élémentaires. En effet,

$$\psi_0'(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\, dt = \frac{1}{z},$$

d'où $\psi_0(z) = \ln z + C$. La constante $C$ sera calculée plus tard.

La fonction $f(t)$ vérifie les conditions du théorème de l'Appendice B pour $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$. On a donc pour $|\arg z| \leqslant \pi - \varepsilon$

$$\psi(z) = \ln z + C - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k k!}{z^{k+1}} + O\left( \frac{1}{z^{n+1}} \right),$$

où $a_k$ sont les coefficients du développement de $f(t)$ en série suivant les puissances de $t$. Les coefficients $a_k$ peuvent être exprimés en fonction des *nombres de Bernoulli* $B_k$, coefficients du développement en série de Taylor de la fonction $t/(e^t - 1)$:

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^\infty B_k \frac{t^k}{k!}, \qquad |t| < 2\pi.$$

En effet,

$$f(t) = 1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t} \sum_{k=0}^\infty B_k \frac{t^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^\infty B_k \frac{t^{k-1}}{k!},$$

d'où

$$a_0 = 1 + B_1, \quad a_k = B_{k+1}/(k+1)! \quad (k \geqslant 1).$$

Puisque $f(-t) = 1 - f(t)$, on a

$$a_0 = 1/2, \quad a_k = 0 \text{ pour } k = 2m \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

On a donc pour $|\arg z| \leqslant \pi - \varepsilon$

$$\psi(z) = C + \ln z - \frac{1}{2z} - \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}}{2kz^{2k}} + R_n(z),$$

où $R_n(z) = O\left(\frac{1}{z^{2n+2}}\right)$.

Puisque

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z),$$

on obtient en intégrant la représentation asymptotique de $\psi(z)$

$$\ln \Gamma(z) = D + (C-1) z + (z - 1/2) \ln z + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1) z^{2k-1}} + \overline{R}_n(z).$$

Ici $D$ est une constante,

$$\overline{R}_n(z) = -\int_z^{\infty} R_n(\xi)\, d\xi.$$

Dans l'expression de $\overline{R}_n(z)$ l'intégrale se prend le long de n'importe quel contour qui s'éloigne à l'infini. Choisissant comme contour la droite $\xi = zt$ $(1 \leqslant t < \infty)$, on s'assure aisément que $\overline{R}_n(z) = O(1/z^{2n+1})$.

Pour déterminer les constantes $C$ et $D$, nous utiliserons les relations fonctionnelles (4), (6) et une évaluation de $\ln \Gamma(z)$ qui se déduit de la représentation asymptotique établie précédemment pour cette fonction :

$$\ln \Gamma(z) = D + (C-1) z + (z - 1/2) \ln z + O(1/z).$$

De la relation

$$\ln \Gamma(z+1) - \ln \Gamma(z) - \ln z = 0$$

il ressort que

$$C - 1 + (z + 1/2) \ln(1 + 1/z) = O(1/z).$$

Puisque

$$\ln(1 + 1/z) = 1/z + O(1/z^2),$$

on a $C = 0$. La valeur de $D$ se déduit d'une façon analogue de la relation (6a), $D = \frac{1}{2} \ln 2\pi$.

Portant les valeurs des constantes $C$ et $D$ dans les relations correspondantes on obtient les *représentations asymptotiques* pour $|\arg z| \leqslant \pi - \varepsilon$:

$$\psi(z) = \ln z - \frac{1}{2z} - \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}}{2kz^{2k}} + O\left(\frac{1}{z^{2n+2}}\right), \tag{21}$$

$$\ln \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \\ + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1) z^{2k-1}} + O\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right). \tag{22}$$

La relation de récurrence pour les nombres de Bernoulli s'établit à l'aide de la représentation

$$t = (e^t - 1) \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} t^{m+k} \frac{B_k}{m!\,k!}.$$

Posons ici $m + k = n$ et faisons la somme des coefficients de $t^n$:

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{(n-k)!\,k!}.$$

Identifiant les coefficients des mêmes puissances de $t$ dans le premier et le second membres de cette égalité, on obtient la relation de récurrence qui permet de calculer successivement les quantités $B_k$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k = 0 \text{ pour } n > 1, \quad B_0 = 1, \quad C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

La représentation asymptotique (22) donne pour $n = 1$

$$\ln \Gamma(z+1) = \left(z + \frac{1}{2}\right) \ln(z+1) - z - 1 + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \\ + \frac{1}{12(z+1)} + O\left(\frac{1}{z^3}\right) = \left(z + \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \\ + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{12z} + O\left(\frac{1}{z^3}\right),$$

d'où

$$\Gamma(z+1) = \sqrt{2\pi z}\,(z/e)^z \left[1 + \frac{1}{12z} + O\left(\frac{1}{z^3}\right)\right].$$

Posant $z = n$, nous aboutissons à la *formule de Stirling*

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n.$$

Remarquons que cette formule reste suffisamment précise même pour des $n$ petits. Par exemple, pour $n = 1$ et $n = 2$ elle donne respectivement 0,92 et 1,92 au lieu de 1! et de 2!

**5. Exemples.** 1) *Intégrales qui se laissent exprimer à l'aide de la fonction gamma:*

$$\int_0^\infty \exp(-\alpha t^\beta)\, t^{\gamma-1}\, dt = \frac{\Gamma(p)}{\alpha^p \beta}, \quad p = \gamma/\beta$$
$$(\operatorname{Re}\alpha > 0, \quad \operatorname{Re}\beta > 0, \quad \operatorname{Re}\gamma > 0); \tag{23}$$

$$\int_a^b (t-a)^{\alpha-1}(b-t)^{\beta-1}\, dt = (b-a)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$
$$(\operatorname{Re}\alpha > 0, \quad \operatorname{Re}\beta > 0). \tag{24}$$

L'intégrale (23) se calcule pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ en faisant le changement $s = \alpha t^\beta$; le résultat obtenu se laisse généraliser ensuite à un domaine plus vaste des valeurs de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ en vertu du principe du prolongement analytique. L'intégrale (24) se réduit à la fonction bêta en faisant le changement $t = a + (b - a)\, s$.

2) *Quelques relations limites*:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right], \tag{25}$$

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z)\, z^a} = 1, \quad |\arg z| \leqslant \pi - \delta, \tag{26}$$

$$\lim_{z\to -n} \frac{\psi(z)}{\Gamma(z)} = (-1)^{n+1} n!\,. \tag{27}$$

La relation (25) s'établit en passant à la limite pour $n \to \infty$ dans la formule

$$\gamma = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \psi(n+1)$$

et en appliquant la représentation (21) de $\psi(n + 1)$. La relation (26) découle immédiatement de (22). La relation (27) ressort de ce que le terme principal du développement de $\Gamma(z)$ en série de Laurent dans le voisinage du point $z = -n$ se présente sous la forme $\frac{(-1)^n}{n!\,(z+n)}$.

## B. Propriétés analytiques et représentations asymptotiques de l'intégrale de Laplace

Par *intégrales de Laplace*, on entend des intégrales du type

$$F(z) = \int_a^b a^{zS(t)} f(t)\, dt.$$

Nous pouvons nous borner au cas où $S(t) = -t$, $a = 0$, $b = +\infty$, i.e.

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt. \qquad (1)$$

Proposons-nous de faire le prolongement analytique de l'intégrale $F(z)$ et voyons ce que devient la fonction $F(z)$ pour $|z| \to \infty$. L'étude du comportement de $F(z)$ pour $|z| \to \infty$ devient plus aisée en donnant à cette fonction une représentation asymptotique, i.e. en la mettant sous la forme

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \varphi_k(z) + O(\varphi_n(z)),$$

où les fonctions $\varphi_k(z)$ vérifient la condition

$$\lim_{|z| \to \infty} \frac{\varphi_{k+1}(z)}{\varphi_k(z)} = 0.$$

En écrivant $\psi(z) = O(\varphi_n(z))$ on veut dire que $|\psi(z)| \leqslant C |\varphi_n(z)|$ ($C$ étant une constante).

En étudiant le comportement des fonctions pour $|z| \to \infty$, on utilise le plus souvent comme $\varphi_k(z)$ les fonctions $\varphi_k(z) = 1/z^{\mu_k}$, où $\mu_k$ sont des constantes.

1. La représentation asymptotique de l'intégrale (1) se construit à l'aide du lemme suivant.

LEMME DE WATSON. *Soit une fonction $f(t)$ telle que:*

1° *l'intégrale* $\int_0^c |f(t)|\, dt$ *existe pour tout $c > 0$, i.e. la fonction $f(t)$ est localement absolument intégrable sur l'intervalle* $]0, \infty[$;

2° *pour $t \to 0$ la fonction $f(t)$ se laisse mettre sous la forme*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^{\lambda_k} + O(t^{\lambda_n}),$$

où $-1 < \operatorname{Re} \lambda_0 < \operatorname{Re} \lambda_1 < \ldots < \operatorname{Re} \lambda_n$;

3° $f(t) = O(e^{\nu t})$ *pour $t \to +\infty$, où $\nu > 0$ est une constante.*

*Alors la fonction $F(z)$ définie par l'intégrale* (1) *admet pour $z \to \infty$, $|\arg z| \leqslant \pi/2 - \varepsilon$, la représentation asymptotique suivante:*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{\Gamma(\lambda_k + 1)}{z^{\lambda_k + 1}} + O\left(\frac{1}{z^{\lambda_n + 1}}\right). \qquad (2)$$

Démonstration. Posons

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^{\lambda_k} + r_n(t).$$

On a alors

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \int_0^\infty e^{-zt} t^{\lambda_k}\, dt + R_n(z),$$

où

$$R_n(z) = \int_0^\infty e^{-zt} r_n(t)\, dt.$$

Puisque (Voir Appendice $A$, n° 5)

$$\int_0^\infty e^{-zt} t^{\lambda_k}\, dt = \frac{\Gamma(\lambda_k + 1)}{z^{\lambda_k + 1}}, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2},$$

le lemme a lieu si l'on montre que $R_n(z) = O\left(\frac{1}{z^{\lambda_n + 1}}\right)$ pour $z \to \infty$. On a

$$R_n(z) = \int_0^\delta e^{-zt} r_n(t)\, dt + \int_\delta^\infty e^{-zt} r_n(t)\, dt = R_n^{(1)}(z) + R_n^{(2)}(z).$$

Il ressort des conditions du lemme que $r_n(t) = O(t^{\lambda_n})$ pour $t \to 0$. Il existe donc des constantes positives $M$, $\delta$ telles que pour $0 \leqslant t \leqslant \delta$ on a l'inégalité $|r_n(t)| \leqslant M t^{\operatorname{Re}\lambda_n}$. Avec une constante $\delta$ ainsi choisie et $\operatorname{Re} z > 0$, on a

$$|R_n^{(1)}(z)| \leqslant \int_0^\delta |e^{-zt} r_n(t)|\, dt \leqslant M \int_0^\delta e^{\;t \operatorname{Re} z} t^{\operatorname{Re}\lambda_n}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant M \int_0^\infty e^{-t \operatorname{Re} z} t^{\operatorname{Re}\lambda_n}\, dt = M \frac{\Gamma(\operatorname{Re}\lambda_n + 1)}{(\operatorname{Re} z)^{\operatorname{Re}\lambda_n + 1}}.$$

Si $|\arg z| \leqslant \pi/2 - \varepsilon$, on a $\operatorname{Re} z \geqslant |z| \sin \varepsilon$, d'où

$$R_n^{(1)}(z) = O\left(\frac{1}{|z|^{\operatorname{Re}\lambda_n + 1}}\right) = O\left(\frac{1}{z^{\lambda_n + 1}}\right).$$

Pour évaluer $R_n^{(2)}(z)$, posons $t=\delta+\tau$:

$$R_n^{(2)}(z)=\int_\delta^\infty e^{-zt}r_n(t)\,dt=e^{-\delta z}\int_0^\infty e^{-z\tau}r_n(\tau+\delta)\,d\tau.$$

L'intégrale $\int_0^\infty e^{-z\tau}r_n(\tau+\delta)\,d\tau$ est uniformément bornée pour $|\arg z|\leqslant\pi/2-\varepsilon$, $\operatorname{Re} z\geqslant\nu+\varepsilon$. On a en effet sous ces conditions

$$\left|\int_0^\infty e^{-z\tau}r_n(\tau+\delta)\,d\tau\right|\leqslant\int_0^\infty e^{-(\nu+\varepsilon)\tau}|r_n(\tau+\delta)|\,d\tau.$$

L'intégrale figurant au second membre de cette inégalité est convergente, car la fonction $r_n(t)$ est par définition localement absolument intégrable et $r_n(t)=O(e^{\nu t})$ pour $t\to+\infty$. Par conséquent

$$R_n^{(2)}(z)=O(e^{-\delta z})\text{ pour } z\to\infty,\quad |\arg z|\leqslant\pi/2-\varepsilon.$$

Etant donné que $O(e^{-\delta z})=O(z^{-s})$ pour tout $s$ positif lorsque $z\to\infty$, on obtient l'évaluation cherchée:

$$R_n(z)=R_n^{(1)}(z)+R_n^{(2)}(z)=O\left(\frac{1}{z^{\lambda_n+1}}\right)\quad\text{pour } z\to\infty,$$

$$|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2}-\varepsilon.$$

Le lemme est démontré. ■

*Remarque.* Le lemme de Watson reste vrai aussi pour une intégrale du type

$$F(z)=\int_0^a e^{-zt}f(t)\,dt,\quad a>0.$$

La condition 3° devient dan ce cas superflue.

**2.** Le prolongement analytique de l'intégrale de Laplace

$$F(z)=\int_0^\infty e^{-zt}f(t)\,dt$$

et la représentation asymptotique du prolongement analytique peuvent être établis, dans les cas qui nous préoccupent, à l'aide du théorème suivant.

THÉORÈME. *Soit $f(t)$ une fonction analytique dans le secteur $|t|>0$, $-\theta_2<\arg t<\theta_1$ $(\theta_1>0,\ \theta_2>0)$, représentable dans ce*

*secteur pour* $t \to 0$ *sous la forme*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^{\lambda_k} + O(t^{\lambda_n}),$$

*où* $-1 < \operatorname{Re}\lambda_0 < \operatorname{Re}\lambda_1 < \ldots < \operatorname{Re}\lambda_n$, *et pour* $t \to \infty$ *sous la forme*

$$f(t) = O(t^{\beta}),$$

*où* $\beta$ *est une constante. Alors la fonction* $F(z)$ *définie par l'intégrale* (1) *pour* $z > 0$ *admet un prolongement analytique dans le secteur* $|z| > 0$, $-\pi/2 - \theta_1 < \arg z < \pi/2 + \theta_2$. *La fonction* $F(z)$ *admet pour* $-\pi/2 - \theta_1 + \varepsilon \leqslant \arg z \leqslant \pi/2 + \theta_2 - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ *la représentation asymptotique suivante:*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{\Gamma(\lambda_k+1)}{z^{\lambda_k+1}} + O\left(\frac{1}{z^{\lambda_n}}\right). \tag{3}$$

D é m o n s t r a t i o n. Etudions le domaine d'analyticité de l'intégrale (1). Soit $z = re^{i\varphi}$. En vertu du théorème sur l'analyticité d'une intégrale dépendant d'un paramètre (voir le théorème 2 du § 3), la fonction $F(z)$ est analytique dans le secteur $|z| > 0$, $|\varphi| < \pi/2$, car l'intégrale $F(z)$ converge uniformément en $z$ dans le domaine $|\varphi| \leqslant \pi/2 - \varepsilon$, $|z| \geqslant \delta > 0$. On a en effet dans ce domaine

$$|e^{-zt}| = e^{-tr\cos\varphi} \leqslant e^{-t\delta\sin\varepsilon},$$

et l'intégrale $\int_0^\infty e^{-t\delta\sin\varepsilon} |f(t)|\, dt$ est convergente par définition.

Pour prolonger $F(z)$ par analyticité dans un domaine plus vaste, faisons dans (1) le changement de variable d'intégration et intégrons non suivant les $t$ positifs mais le long d'un demi-axe $t = \rho e^{i\theta}$ ($\theta =$ const, $\rho > 0$) ; nous devons considérer dans ce contexte la fonction

$$F_\theta(z) = \int_0^{\infty e^{i\theta}} e^{-zt} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-(ze^{i\theta})\rho} f(\rho e^{i\theta})\, e^{i\theta}\, d\rho \tag{4}$$

$$(-\theta_2 < 0 < \theta_1).$$

L'étude du domaine d'analyticité de l'intégrale $F_\theta(z)$, analogue à celle pour l'intégrale $F(z)$, montre que la fonction $F_\theta(z)$ est analytique dans le domaine $|\arg(ze^{i\theta})| = |\varphi + \theta| < \pi/2$. Montrons que la fonction $F_\theta(z)$ constitue pour $|\theta| < \pi$ le prolongement analytique de la fonction $F(z)$. Pour le faire, il suffit de montrer que les deux fonctions deviennent égales sur un certain demi-axe $\varphi = \varphi_0$

qui appartient au domaine d'analyticité des deux fonctions, par exemple $\varphi_0 = -\theta/2$.

Nous appliquerons le théorème de Cauchy en calculant l'intégrale $\int_C e^{-zt} f(t)\, dt$ le long du contour fermé montré sur la figure 17:

$$\int_C e^{-zt} f(t)\, dt = 0.$$

Sur l'arc de rayon $R$, on a pour $t = Re^{i\psi}$, $\psi \in [0, \theta]$ et $z = re^{-i\theta/2}$:

$$f(t) = O(R^{\beta}), \quad |e^{-zt}| = e^{-rR\cos(\psi - \theta/2)}.$$

Puisque $|\psi - \theta/2| \leqslant |\theta/2| < \pi/2$, on a $\cos(\psi - \theta/2) \geqslant \cos\frac{\theta}{2} > > 0$. Conformément aux évaluations obtenues, l'intégrale prise le

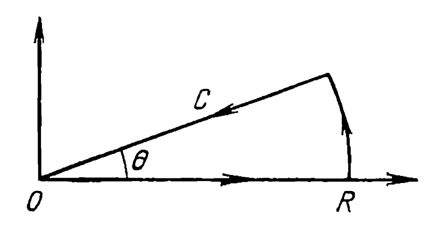



Fig. 17

long de l'arc de rayon $R$ tend vers zéro quand $R \to \infty$, i.e. pour $\varphi = -\theta/2$ on a $F(z) = F_{\theta}(z)$. Si dans le secteur $-\theta_2 < \theta < \theta_1$ on admet des valeurs $|\theta| \geqslant \pi$, on montre par un raisonnement analogue que la fonction $F_{\tilde{\theta}}(z)$ constitue le prolongement analytique de $F_{\theta}(z)$, à condition que $|\tilde{\theta} - \theta| < \pi$.

Ainsi donc, la totalité des fonctions $F_{\theta}(z)$ pour toutes les valeurs possibles de $\theta$ donne le prolongement analytique de la fonction $F(z)$ sur un domaine qui réunit les secteurs $|\varphi + \theta| < \pi/2$, $-\theta_2 < < \theta < \theta_1$, i.e. sur le secteur $-\pi/2 - \theta_1 < \varphi < \pi/2 + \theta_2$. La première assertion du théorème est démontrée.

Pour construire la représentation asymptotique de la fonction $F_{\theta}(z)$ dans le secteur $|\varphi + \theta| \leqslant \pi/2 - \varepsilon$, il suffit d'appliquer le lemme de Watson et la formule (4) de $F_{\theta}(z)$. Puisqu'on a par définition

$$f(\rho e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (\rho e^{i\theta})^{\lambda_k} + O(\rho^{\lambda_n})$$

pour $\rho \to 0$ et

$$f(\rho e^{i\theta}) = O(\rho^{\beta})$$

pour $\rho \to +\infty$, il vient en vertu du lemme de Watson

$$F_\theta(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k (e^{i\theta})^{\lambda_k} e^{i\theta}\Gamma(\lambda_k+1)}{(ze^{i\theta})^{\lambda_k+1}} + O\left(\frac{1}{z^{\lambda_n+1}}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{\Gamma(\lambda_k+1)}{z^{\lambda_k+1}} + O\left(\frac{1}{z^{\lambda_n+1}}\right).$$

Le théorème est démontré. ■

*Remarque* 1. Si la fonction $f(t)$ admet dans le voisinage du point $t=0$ la représentation $f(t) = t^\lambda g(t)$, où $g(t)$ est une fonction analytique, $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$, on doit poser dans le théorème $\lambda_k = \lambda + k$; les constantes $a_k$ sont les coefficients du développement taylorien de la fonction $g(t)$:

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k.$$

*Remarque* 2. Si dans le théorème la fonction $f(t)$ dépend des paramètres, est fonction analytique de chacun des paramètres dans un domaine $D$ et reste continue dans le domaine $D$ de variation des paramètres pour l'ensemble des variables avec $|t| > 0$, $-\theta_2 < \arg t < \theta_1$, alors le prolongement analytique en $z$ de $F(z)$ pour $z \neq 0$ sera également fonction analytique de chacun des paramètres dans la partie de $D$ où l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\mu\rho} |f(\rho e^{i\theta})|\, d\rho$$

converge uniformément par rapport aux paramètres pour tout $\mu > 0$ donné.

En effet, l'intégrale $F_\theta(z)$ réalisant le prolongement analytique de la fonction $F(z)$ converge uniformément dans ce cas pour $|\varphi + \theta| \leqslant \pi/2 - \varepsilon$, $|z| \geqslant \delta$, car on a dans ce domaine

$$|F_\theta(z)| \leqslant \int_0^\infty e^{-\mu\rho} |f(\rho e^{i\theta})|\, d\rho \quad (\mu = \delta \sin \varepsilon).$$

*Exemple.* Cherchons le domaine sur lequel la fonction

$$F(z, p, q) = \int_0^\infty e^{-zt} t^p (1+at)^q\, dt$$

$$(z > 0, \ |\arg a| < \pi, \ |\arg(1+at)| < \pi, \ \mathrm{Re}\, p > -1)$$

admet un prolongement analytique en chacune des variables, et établissons le développement asymptotique de cette fonction pour $z \to \infty$.

Dans ce cas on a $f(t) = t^p (1 + at)^q$, la fonction $g(t) = (1 + at)^q$ admet un point singulier (point de branchement) pour $at = -1$. Cette fonction est analytique dans le secteur $|\arg (at)| < \pi$, i.e. pour $-\pi - \arg a < \arg t < \pi - \arg a$. Il convient donc de poser dans le théorème $\theta_1 = \pi - \arg a$, $\theta_2 = \pi + \arg a$, $\lambda_k = p + k$, $\beta = p + q$.

Pour déterminer le domaine sur lequel la fonction $F(z, p, q)$ admet un prolongement analytique en chacune des variables, cherchons le domaine où l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\mu\rho} |f(\rho e^{i\theta})| \, d\rho = \int_0^\infty e^{-\mu\rho} |\rho e^{i\theta}|^p \, |(1 + a e^{i\theta}\rho)^q| \, d\rho,$$

$$|\arg (a e^{i\theta})| < \pi,$$

est uniformément convergente en $p$ et $q$ pour $\mu > 0$ fixe quelconque (cf. Remarque 2). Cela a lieu quand $\operatorname{Re} p \geqslant \delta - 1$, $|p| \leqslant N$, $|q| \leqslant N$. En effet, si $t = \rho e^{i\theta}$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, la fonction $\left| \frac{f(t)}{t^{\delta - 1}} \right|$ reste bornée, car elle est continue dans le domaine fermé par rapport à l'ensemble des variables, i.e. $|f(t)| \leqslant C_1 \rho^{\delta - 1}$ $(0 < \rho \leqslant 1)$. Pour $\rho \geqslant 1$ on applique le même raisonnement après avoir changé la variable $\rho$ en $s = 1/\rho$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$. On verra alors que la fonction $\left| \frac{f(t)}{t^{2N}} \right|$ reste bornée pour $\rho \geqslant 1$, i.e. $|f(t)| \leqslant C_2 \rho^{2N}$. Les constantes $C_1$ et $C_2$, comme le montre le raisonnement développé, sont indépendantes des paramètres $p$ et $q$. Les intégrales

$$\int_0^1 e^{-\mu\rho} \rho^{\delta - 1} \, d\rho \quad \text{et} \quad \int_1^\infty e^{-\mu\rho} \rho^{2N} \, d\rho$$

étant convergentes, l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\mu\rho} |f(\rho e^{i\theta})| \, d\rho$$

converge uniformément dans le domaine considéré. Aussi la fonction $F(z, p, q)$ admet-elle un prolongement analytique en chacune des variables dans le domaine

$$\operatorname{Re} p \geqslant -1 + \delta, \quad |p| \leqslant N, \quad |q| \leqslant N, \quad z \neq 0,$$

$$-\frac{3}{2}\pi + \arg a < \arg z < \frac{3}{2}\pi + \arg a.$$

Les variables $\delta$ et $N$ étant arbitraires, on peut prendre, au lieu du domaine indiqué de variation des variables, le domaine

$$\operatorname{Re} p > -1, \quad z \neq 0, \quad -\frac{3}{2}\pi + \arg a < \arg z < \frac{3}{2}\pi + \arg a.$$

Pour $|\arg z| < \pi/2$ le prolongement analytique de la fonction $F(z, p, q)$ peut être obtenu à l'aide de l'intégrale initiale

$$\int_0^\infty e^{-zt} t^p (1 + at)^q \, dt \quad (\operatorname{Re} p > -1).$$

En vertu du théorème, la fonction $F(z, p, q)$ admet dans le secteur $-\frac{3}{2}\pi + \arg a + \varepsilon \leqslant \arg z < \frac{3}{2}\pi + \arg a - \varepsilon$, pour $z \to \infty$, la représentation asymptotique suivante:

$$F(z, p, q) = \frac{\Gamma(q+1)}{z^{p+1}} \left[ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(p+k+1)}{k!\,\Gamma(q+1-k)} \left(\frac{a}{k}\right)^k + O\left(\frac{1}{z^n}\right)\right].$$

## C. Formules de quadrature du type de Gauss

Par *formules de quadrature du type de Gauss*, on entend des formules du type

$$\int_a^b f(x)\,\rho(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j) \tag{1}$$

dans lesquelles les coefficients $\lambda_j$ et les nœuds $x_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) sont choisis de telle façon que la formule (1) soit exacte pour tout polynôme de degré $2n - 1$.

Connaissant les moments de la fonction poids

$$C_k = \int_a^b x^k \rho(x)\,dx,$$

on peut chercher les nombres $\lambda_j$ et $x_j$ à partir du système d'équations

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^k = C_k \quad (k = 0, 1, \ldots, 2n-1).$$

Or, le plus souvent, les formules de quadrature du type (1) se construisent autrement. Il se trouve que les nœuds $x_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) sont les zéros d'un polynôme $p_n(x)$, orthogonal sur l'intervalle $]a, b[$ par rapport au poids $\rho(x)$. Pour le montrer, considérons la fonction

$$f(x) = x^k \tilde{p}_n(x)$$

où

$$\tilde{p}_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = \prod_{j=1}^{n} (x - x_j)$$

est un polynôme de degré $n$ dont les zéros se confondent avec les nœuds de la formule de quadrature. Pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$ la fonction $f(x)$ est un polynôme de dégré non supérieur à $2n-1$. Ainsi donc, si la fonction $f(x)$ dans (1) est telle que nous l'avons définie ci-dessus, la formule de quadrature donne la valeur exacte de l'intégrale pour tout $k < n$. On en déduit pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$

$$\int_a^b f(x)\rho(x)\,dx = \int_a^b x^k \tilde{p}_n(x)\rho(x)\,dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x^k (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)|_{x=x_j} = 0.$$

Ainsi donc, le polynôme $\tilde{p}_n(x)$ est orthogonal à toute puissance inférieure à $n$, ce qui veut dire qu'il se confond, à un facteur constant près, avec le polynôme $p_n(x)$ de degré $n$ orthogonal sur l'intervalle $]a, b[$ avec le poids $\rho(x)$. Il en découle que, pour définir les nœuds $x_j$ de la formule de quadrature, il suffit de construire le polynôme $p_n(x)$ et de localiser ses zéros.

Pour déterminer les coefficients $\lambda_j$, appelés généralement *nombres de Christoffel*, il est bon de prendre dans (1) comme $f(x)$ un polynôme de degré inférieur à $2n$, tel qu'il s'annule en tous les nœuds à l'exception d'un seul: $x = x_j$. On obtient alors

$$\lambda_j = \frac{1}{f(x_j)} \int_a^b f(x)\rho(x)\,dx.$$

Posant par exemple $f(x) = \left[\frac{1}{x - x_j} p_n(x)\right]^2$ ou $f(x) = \frac{p_n(x)}{x - x_j} p_{n-1}(x)$, on aboutit aux expressions suivantes des nombres $\lambda_j$:

$$\lambda_j = \int_a^b \left[\frac{p_n(x)}{p_n'(x_j)(x - x_j)}\right]^2 \rho(x)\,dx, \tag{2}$$

$$\lambda_j = \frac{1}{p_n'(x_j)\,p_{n-1}(x_j)} \int_a^b \frac{p_n(x)}{x - x_j} p_{n-1}(x)\rho(x)\,dx. \tag{3}$$

On voit de (2) que $\lambda_j > 0$. L'intégrale du second membre de (3) n'offre aucune difficulté. Puisque

$$\frac{p_n(x)}{x - x_j} = \frac{a_n}{a_{n-1}} p_{n-1}(x) + q_{n-2}(x),$$

où $a_n$ est le coefficient du terme de plus haut degré du polynôme $p_n(x)$ et $q_{n-2}(x)$ est un polynôme de degré $n-2$, on obtient en vertu des propriétés d'orthogonalité des polynômes $p_n(x)$

$$\lambda_j = \frac{a_n d_{n-1}^2}{a_{n-1} p_n'(x_j)\, p_{n-1}(x_j)}, \tag{4}$$

où $d_n^2 = \int_a^b p_n^2(x)\,\rho(x)\,dx$ est le carré de la norme.

Remarquons que tous les raisonnements relatifs à l'établissement des formules de quadrature du type de Gauss servant au calcul d'intégrales restent valables si l'on considère au lieu d'une intégrale $\int_a^b f(x)\,\rho(x)\,dx$ une somme $\sum_i f(x_i)\,\rho(x_i)$ (voir § 12, nº 3). Dans ce cas on cherchera les nœuds de la formule de quadrature et les nombres de Christoffel en utilisant les polynômes orthogonaux correspondants d'une variable discrète. Cela facilite grandement la tâche, surtout lorsqu'il s'agit des sommes dans lesquelles les fonctions $f(x)$ sont difficiles à calculer, car on arrive, grâce au procédé indiqué, à prendre des sommes comprenant beaucoup moins de termes.

Considérons quelques exemples caractéristiques d'application des formules de quadrature du type de Gauss.

*Exemple 1.* Beaucoup de fonctions spéciales se représentant sous forme d'intégrales définies, l'application des formules de quadrature du type de Gauss à ces intégrales conduit à des formules approchées faciles à manier et suffisamment précises pour les fonctions spéciales étudiées.

Parmi les fonctions cylindriques, on rencontre le plus souvent dans les applications les fonctions de Bessel $J_0(z)$ et $J_1(z)$. Les formules approchées simples définissant ces fonctions s'avèrent souvent d'une grande utilité, en particulier lors des calculs sur ordinateur, quand une formule est préférable à une table.

Etablissons quelques formules approchées de $J_0(z)$ et de $J_1(z)$ en les déduisant de la représentation intégrale de Poisson. On a

$$J_m(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+1/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^m \int_{-1}^{1} (1-s^2)^{m-1/2} \cos zs\, ds.$$

Pour $m = 0$ l'intégrale figurant au second membre se laisse calculer par la formule de quadrature du type de Gauss

$$\int_{-1}^{1} f(s) \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\, ds \approx \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(s_j).$$

Ici $s_j$ sont les zéros des polynômes de Tchébychev de première espèce orthogonaux sur l'intervalle $]-1, 1[$ par rapport au poids $\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$ ; $\lambda_j$ sont les nombres de Christoffel :

$$s_j = \cos \frac{2j-1}{2n} \pi, \qquad \lambda_j = \frac{\pi}{n}.$$

Posant $f(s) = \cos zs$, on obtient une formule approchée pour la fonction $J_0(z)$ :

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\cos zs}{\sqrt{1-s^2}} ds \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \cos \left( z \cos \frac{2j-1}{2n} \pi \right).$$

Utilisant la relation $J_1(z) = -J_0'(z)$, on établit aussi une formule approchée pour la fonction $J_1(z)$ :

$$J_1(z) \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \cos \frac{2j-1}{2n} \pi \sin \left( z \cos \frac{2j-1}{2n} \pi \right).$$

Pour $n$ pair les nœuds $s_j$ de la formule de quadrature sont symétriques par rapport au point $s = 0$. Alors, si $f(s)$ est une fonction paire, la formule de quadrature comportera $n/2$ termes distincts. Posons par exemple $n = 6$ ; il vient

$$J_0(z) \approx \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{3} \cos zx_j,$$

$$J_1(z) \approx \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{3} x_j \sin zx_j.$$

Ici

$$x_j = \cos \frac{2j-1}{12} \pi = \begin{cases} \cos(\pi/12) = 0{,}965926, \\ \cos(\pi/4) = 0{,}707107, \\ \cos(5\pi/12) = 0{,}258819. \end{cases}$$

Pour apprécier la précision des calculs d'après les formules citées, consultons le tableau 5 qui compare les valeurs exactes des fonctions $J_0(z)$, $J_1(z)$ avec leurs valeurs obtenues à l'aide des formules approchées (désignées $\tilde{J}_0(z)$, $\tilde{J}_1(z)$).

De toute évidence, les formules proposées restent aussi valables pour des $z$ complexes, à condition que $|z|$ ne soit pas excessivement grand.

*Tableau 5*

| $z$ | $J_0(z)$ | $\tilde{J}_0(z)$ | $J_1(z)$ | $\tilde{J}_1(z)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,4 | 0,9604 | 0,9604 | 0,1960 | 0,1960 |
| 1,2 | 0,6711 | 0,6711 | 0,4983 | 0,4983 |
| 2,0 | 0,2239 | 0,2239 | 0,5767 | 0,5767 |
| 2,8 | −0,1850 | −0,1850 | 0,4097 | 0,4097 |
| 3,6 | −0,3918 | −0,3918 | 0,09547 | 0,09548 |
| 4,4 | −0,3423 | −0,3423 | −0,2028 | −0,2027 |
| 5,2 | −0,1103 | −0,1105 | −0,3432 | −0,3427 |
| 6,0 | 0,1506 | 0,1496 | −0,2767 | −0,2748 |

*Exemple 2.* Examinons l'application des formules de quadrature du type de Gauss au calcul des sommes du type

$$S_N = \sum_{k=0}^{N-1} f(k).$$

Grâce à ces formules, on arrive à remplacer $S_N$ par une somme où il y a moins de termes:

$$S_N \approx \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j).$$

Les nœuds $x_j$ de la formule de quadrature sont les zéros d'un polynôme $p_n(x)$ possédant les propriétés d'orthogonalité suivantes:

$$\sum_{k=0}^{N-1} p_n(k)\, p_m(k) = 0 \quad (m \neq n).$$

Les polynômes orthogonaux correspondants seront des polynômes de Tchébychev d'une variable discrète (voir § 12).

Considérons à titre d'exemple le tableau 6 où sont comparés les résultats de calcul des sommes $S_N$ pour $f(k) = \sqrt{l+k}$ ($l$ entier) et pour des nombres $n$ différents de points de quadrature. On rencontre souvent des fonctions de ce type en mécanique quantique. Remarquons

*Tableau 6*

| $N-1$ | 10 | | 1000 | |
|---|---|---|---|---|
| $n$ \ $l$ | 1 | 10 | 1 | 10 |
| 1 | 26,944 | 42,603 | 22 405 | 22 606 |
| 3 | 25,808 | 42,360 | 21 207 | 21 453 |
| 5 | 25,786 | 42,360 | 21 148 | 21 405 |
| $N$ | 25,785 | 42,360 | 21 129 | 21 395 |

que pour $n = N$ la formule de quadrature fournit la valeur exacte de la somme cherchée.

*Exemple 3.* En cherchant les facteurs d'absorption de la lumière dans les raies du spectre, on est souvent amené à calculer des intégrales du type *)

$$K(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y e^{-s^2}}{(x-s)^2 + y^2} ds \quad (y > 0). \tag{5}$$

Le domaine des valeurs de $s$ essentiel pour l'intégration se réduit, en raison du facteur $e^{-s^2}$, aux valeurs de $|s| < 1$. Dans ce domaine la fonction $\frac{1}{(x-s)^2+y^2}$ pour $x$ donné est une fonction de $s$ à variation suffisamment lente tant que $y$ est assez grand. On peut donc calculer la fonction $K(x, y)$ pour $y > 1$ à l'aide des formules de quadrature du type de Gauss où interviennent des polynômes d'Hermite:

$$K(x, y) \approx K_1(x, y) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{y}{(x-s_j)^2 + y^2}. \tag{6}$$

Or, pour un $y$ petit, la fonction $\frac{y}{(x-s)^2+y^2}$ présente un maximum bien marqué en $x = s$, si bien que la formule de quadrature (6) sera inexacte pour des $x$ petits. On peut contourner cet inconvénient en donnant préalablement à $K(x, y)$ une forme mieux adaptée à l'application des formules de quadrature du type de Gauss. On a

$$K(x, y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-s^2}}{(x-s) - iy} ds.$$

Au lieu de faire l'intégration le long de l'axe réel, nous allons intégrer, d'après le théorème de Cauchy, le long d'une droite parallèle à l'axe réel en posant $s = ai + t$ $(a > 0, -\infty < t < \infty)$; il vient alors pour $K(x, y)$

$$K(x, y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(ai+t)^2}}{(x-t) - i(a+y)} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}[(a+y)\cos 2at - (x-t)\sin 2at]}{(x-t)^2 + (a+y)^2} dt. \tag{7}$$

---

*) Voir И. И. Собельман, *Введение в теорию атомных спектров*. М., Физматгиз, 1963, § 35, п. 3 (I. Sobelman, *Introduction à la théorie des spectres atomiques*).

Grâce à une telle transformation, nous remplaçons sous le signe d'intégration la fonction au maximum bien marqué $\frac{1}{(x-s)^2+y^2}$ par une fonction aplatie $\frac{1}{(x-t)^2+(a+y)^2}$ qui se laisse approcher avec bonne précision, dans le domaine essentiel pour l'intégration, par un polynôme de degré assez petit. Il est vrai qu'on voit apparaître alors dans l'intégrande un facteur oscillant. Si l'on choisit $a \approx 1$, on rend la fonction $[(a+y)\cos 2at - (x-t)\sin 2at]$ assez bonne dans le domaine intéressé.

Calculons à présent l'intégrale (7) à l'aide d'une formule de quadrature du type de Gauss dans laquelle figurent des polynômes d'Hermite:

$$K(x,\ y) \approx K_2(x,\ y) = \frac{e^{a^2}}{\pi} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{(a+y)\cos 2as_j - (x-s_j)\sin 2as_j}{(x-s_j)^2+(a+y)^2}. \qquad (8)$$

L'analyse effectuée montre qu'en appliquant une formule de quadrature du type de Gauss au calcul de l'intégrale (7), on obtient de bons résultats pour $x$ et $y$ quelconques, même si les points de quadrature ne sont pas nombreux : il suffit de choisir $a \approx 1$. On s'en assure en examinant le tableau 7 où sont confrontés les résultats de calcul

*Tableau 7*

| $n$ | $x=0,\ y=0{,}01$ | | $x=1,\ y=0{,}01$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $K(x,\ y)=0{,}989$ | | $K(x,\ y)=0{,}369$ | |
| | $K_1(x,\ y)$ | $K_2(x,\ y)$ | $K_1(x,\ y)$ | $K_2(x,\ y)$ |
| 3 | 37,6 | 1,013 | 0,0225 | 0,387 |
| 5 | 30,1 | 0,991 | 0,693 | 0,370 |
| 7 | 25,8 | 0,9895 | 0,0434 | 0,369 |

| $n$ | $x=0,\ y=1$ | | $x=1,\ y=1$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $K(x,\ y)=0{,}428$ | | $K(x,\ y)=0{,}305$ | |
| | $K_1(x,\ y)$ | $K_2(x,\ y)$ | $K_1(x,\ y)$ | $K_2(x,\ y)$ |
| 3 | 0,451 | 0,441 | 0,293 | 0,317 |
| 5 | 0,434 | 0,428 | 0,305 | 0,305 |
| 7 | 0,430 | 0,428 | 0,306 | 0,305 |

des intégrales (5) et (7) à l'aide des formules (6) et (8) pour les différents nombres de points de quadrature avec $a = 1$ et pour des valeurs différentes de $x$ et de $y$.

Nous donnons en conclusion les tableaux 8, 9, 10 qui résument les valeurs des nombres de Christoffel $\lambda_j$ et des nœuds $x_j$ servant au calcul des intégrales des différents types d'après des formules de quadrature du type de Gauss *). Ces formules utilisent comme nœuds les zéros de polynômes de Legendre, de Laguerre et d'Hermite. Pour les polynômes de Legendre et d'Hermite, on ne trouve dans les tableaux que des valeurs non négatives de $x_j$. Il est à noter qu'il existe dans ce cas pour chaque $x_j$ positif une valeur négative $-x_j$ de même poids $\lambda_j$.

*Tableau 8*

| $n$ | $x_j$ | $\lambda_j$ | $n$ | $x_j$ | $\lambda_j$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0,5773502692 | 1 | 8 | 0,1834346422<br>0,5355324099<br>0,7966664774<br>0,9602898565 | 0,3626837834<br>0,3137066459<br>0,222381035<br>0,1012285363 |
| 3 | 0<br>0,7745966692 | 0,8888888888<br>0,5555555555 | | | |
| 4 | 0,3399810436<br>0,8611363116 | 0,6521451549<br>0,3478548451 | 9 | 0<br>0,3242534234<br>0,6133714327<br>0,8360311073<br>0,9681602395 | 0,3302393550<br>0,3123470770<br>0,2606106964<br>0,1806481607<br>0,08127438836 |
| 5 | 0<br>0,5384693101<br>0,9061798459 | 0,5688888888<br>0,4786286705<br>0,2362688506 | | | |
| 6 | 0,2386191861<br>0,6612093865<br>0,9324695142 | 0,4679139346<br>0,3607615731<br>0,1713244924 | 10 | 0,1488743390<br>0,4333953941<br>0,6794095683<br>0,8650633667<br>0,9739065285 | 0,2955242247<br>0,2692667193<br>0,2190863625<br>0,1494513491<br>0,06667134430 |
| 7 | 0<br>0,4058451514<br>0,7415311856<br>0,9491079123 | 0,4179591837<br>0,3818300505<br>0,2797053915<br>0,1294849662 | | | |

Les formules de quadrature s'écrivent:

1) $$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j)$$

($x_j$ sont les zéros de polynômes de Legendre $P_n(x)$, voir le tableau 8);

2) $$\int_{0}^{\infty} e^{-x} f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j)$$

*) Une notation abrégée est utilisée pour des nombres $\lambda_j \ll 1$, par exemple: 0,(4)233699 = 0,0000233699.

($x_j$ sont les zéros de polynômes de Laguerre $L_n^0(x)$, voir le tableau 9) ;

$$3)\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j)$$

($x_j$ sont les zéros de polynômes d'Hermite $H_n(x)$, voir le tableau 10).

*Tableau 9*

| $n$ | $x_j$ | $\lambda_j$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0,5857864376 | 0,8535533906 |
| | 3,4142135624 | 0,1464466094 |
| 3 | 0,4157745567 | 0,7110930099 |
| | 2,2942803603 | 0,2785177336 |
| | 6,2899450829 | 0,0103892565 |
| 4 | 0,3225476896 | 0,6031541043 |
| | 1,7457611011 | 0,3574186924 |
| | 4,5366202969 | 0,03888790851 |
| | 9,3950709123 | 0,(3)53929447056 |
| 5 | 0,2635603197 | 0,5217556106 |
| | 1,4134030591 | 0,3986668111 |
| | 3,5964257710 | 0,07594244968 |
| | 7,0858100059 | 0,(2)3611758679 |
| | 12,6408008443 | 0,(4)2336997239 |
| 6 | 0,2228466042 | 0,4589646740 |
| | 1,1889321017 | 0,4170008308 |
| | 2,9927363261 | 0,1133733821 |
| | 5,7721435691 | 0,01039919745 |
| | 9,8374674184 | 0,(3)2610172028 |
| | 15,9828739806 | 0,(6)8985479064 |
| 7 | 0,1930436766 | 0,4093189517 |
| | 1,0266648953 | 0,4218312779 |
| | 2,5678767450 | 0,1471263487 |
| | 4,90003530845 | 0,02063351447 |
| | 8,1821534446 | 0,(2)1074010143 |
| | 12,7341802918 | 0,(4)1586546435 |
| | 19,3957278623 | 0,(7)3170315479 |
| 8 | 0,1702796323 | 0,3691885893 |
| | 0,9037017768 | 0,4187867808 |
| | 2,2210866299 | 0,1757949866 |
| | 4,2667001703 | 0,03334349226 |
| | 7,0429054024 | 0,(2)2794536235 |
| | 10,7585160102 | 0,(4)9076508773 |
| | 15,7406786413 | 0,(6)8584746716 |
| | 22,8331317369 | 0,(8)1048001175 |
| 9 | 0,1523222277 | 0,3361264218 |
| | 0,8072200227 | 0,4112139804 |
| | 2,0051351556 | 0,1992875254 |
| | 3,7834739733 | 0,04746056277 |
| | 6,2049567778 | 0,(2)5599626611 |
| | 9,3729852517 | 0,(3)3052497671 |
| | 13,4662369110 | 0,(5)6592123026 |
| | 18,8335977889 | 0,(7)4110769330 |
| | 26,3740728909 | 0,(10)3290874030 |
| 10 | 0,1377934705 | 0,3084411158 |
| | 0,7294545495 | 0,4011199292 |
| | 1,9083429017 | 0,1180682876 |
| | 3,4014336979 | 0,06208745610 |
| | 5,2224961400 | 0,(2)9501516975 |
| | 8,3301527468 | 0,(3)7530083886 |
| | 11,8437858379 | 0,(4)2825923350 |
| | 16,2792578314 | 0,(6)4249313985 |
| | 21,9965858120 | 0,(8)1839564824 |
| | 29,9206970122 | 0,(12)9911827220 |

*Tableau 10*

| $n$ | $x_j$ | $\lambda_j$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1,772453851 |
| 2 | 0,7071067812 | 8,8862269255 |
| 3 | 0<br>1,2247448714 | 1,181635901<br>0,2954089752 |
| 4 | 0,5246476233<br>1,6506801239 | 0,8049140900<br>0,08131283545 |
| 5 | 0<br>0,9585724646<br>2,0201828705 | 0,9453087205<br>0,3936193232<br>0,01995324206 |
| 6 | 0,4360774119<br>1,3358490740<br>2,3506049737 | 0,7246295952<br>0,1570673203<br>0,(2)4530009906 |
| 7 | 0<br>0,8162878829<br>1,6735516288<br>2,6519613568 | 0,8102646176<br>0,4256072526<br>0,05451658282<br>0,(3)9717812451 |

| $n$ | $x_j$ | $\lambda_j$ |
|---|---|---|
| 8 | 0,3811869902<br>1,1571937124<br>1,9816567567<br>2,9306374203 | 0,6611470126<br>0,2078023258<br>0,01707798301<br>0,(3)1996040722 |
| 9 | 0<br>0,7235510188<br>1,4685532892<br>2,2665805845<br>3,1909932018 | 0,7202352156<br>0,4326515590<br>0,08847452739<br>0,(2)4943624276<br>0,(4)3960697726 |
| 10 | 0,3429013272<br>1,0366108298<br>1,7566836493<br>2,5327316742<br>3,4261591188 | 0,6108626337<br>0,2401386111<br>0,03387439446<br>0,(2)13436445747<br>0,(5)7640432855 |

# RAPPEL DES FORMULES PRINCIPALES

**1. Fonction gamma $\Gamma(z)$.**

*Définition*:

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt, \qquad \operatorname{Re} z>0.$$

*Prolongement analytique*. La fonction $\Gamma(z)$ admet un prolongement analytique sur le plan complexe tout entier à l'exception des points $z=-n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ en lesquels elle possède des pôles du premier ordre aux résidus

$$\operatorname{Res}\Gamma(z)=(-1)^n/n\,!\,.$$

*Intégrales dans lesquelles intervient la fonction gamma*:

$$B(x, y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt=\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \qquad \operatorname{Re} x>0, \qquad \operatorname{Re} y>0;$$

$$\int_0^\infty \exp(-\alpha t^\beta)\,t^{\gamma-1}\,dt=\frac{\Gamma(p)}{\alpha^p\beta}, \qquad p=\frac{\gamma}{\beta},$$

$$\operatorname{Re}\alpha>0, \qquad \operatorname{Re}\beta>0, \qquad \operatorname{Re}\gamma>0.$$

*Relations fonctionnelles*:

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z), \quad \Gamma(z)\,\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z},$$

$$2^{2z-2}\Gamma(z)\,\Gamma(z+1/2)=\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z).$$

*Valeurs particulières*:

$$\Gamma(n+1)=n\,!\,, \qquad \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma(n+1/2)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}}\,\frac{(2n)\,!}{n\,!}.$$

*Représentation asymptotique et ses corollaires*:

$$\ln\Gamma(z)=(z-1/2)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln 2\pi+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)\,z^{2k-1}}+O\left(\frac{1}{z^{2n-1}}\right), \qquad |\arg z|\leqslant\pi-\delta,$$

$B_k$ sont les nombres de Bernoulli qui se laissent déduire de la relation de récurrence

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k = 0 \quad (n > 1), \quad B_0 = 1, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \left[1 + \frac{1}{12x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right] \quad (x > 0),$$

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{(formule de Stirling)},$$

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z)} = z^a\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right], \quad |\arg z| \leqslant \pi - \delta.$$

La courbe représentative de la fonction $y = \Gamma(x)$ est donnée à l'Appendice A.

**2. Dérivée logarithmique de la fonction gamma $\psi(z)$.**

*Définition*:

$$\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z).$$

*Relations fonctionnelles*:

$$\psi(z+1) = 1/z + \psi(z), \quad \psi(z) = \psi(1-z) - \pi \operatorname{cotg} \pi z,$$

$$2 \ln 2 + \psi(z) + \psi(z + 1/2) = 2\psi(2z).$$

*Valeurs particulières*:

$$\psi(1) = \Gamma'(1) = -\gamma, \quad \gamma = 0{,}57721566\ldots,$$

$$\psi(1/2) = -\gamma - 2\ln 2, \quad \psi(n+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

$$\psi(n + 1/2) = -\gamma - 2\ln 2 + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}.$$

*Représentations intégrales et développement en série*:

$$\psi(z) = -\gamma + \int_0^1 \frac{1-t^{z-1}}{1-t}\,dt = -\gamma + \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-zt}}{1-e^{-t}}\,dt, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

$$\psi(z) = -\gamma + (z-1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(z+n)}, \quad z \neq -n \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

*Représentation asymptotique*:

$$\psi(z) = \ln z - \frac{1}{2z} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{B_{2k}}{2kz^{2k}} + O\left(\frac{1}{z^{2n}}\right),$$

$|\arg z| \leqslant \pi - \delta$, $B_k$ sont les nombres de Bernoulli (voir nº 1).

**3. Equation généralisée du type hypergéométrique.**
*Equation différentielle*:

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)} u' + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)} u = 0,$$

$\sigma(z)$ et $\tilde{\sigma}(z)$ sont des polynômes de degré non supérieur à 2, $\tilde{\tau}(z)$ est un polynôme de degré non supérieur à 1.

*Réduction de l'équation généralisée du type hypergéométrique à une équation du type hypergéométrique.* Par le changement $u = \varphi(z)\, y$ on réduit l'équation différentielle initiale à la forme

$$\sigma(z)\, y'' + \tau(z)\, y' + \lambda y = 0,$$

où $\tau(z)$ est un polynôme de degré non supérieur à 1 et $\lambda$ est une constante. La fonction $\varphi(z)$ vérifie l'équation

$$\varphi'/\varphi = \pi(z)/\sigma(z)$$

dans laquelle $\pi(z)$ est un polynôme de degré non supérieur à 1:

$$\pi(z) = \frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma} + k\sigma}.$$

La constante $k$ est choisie de façon à annuler le discriminant du trinôme du second degré sous le radical. Le polynôme $\tau(z)$ et la constante $\lambda$ sont définis par les égalités

$$\tau(z) = \tilde{\tau}(z) + 2\pi(z), \qquad \lambda = k + \pi'(z).$$

E x c e p t i o n s. 1) Si le polynôme $\sigma(z)$ admet une racine multiple, i.e. $\sigma(z) = (z - a)^2$, alors par le changement $s = 1/(z - a)$ on réduit l'équation initiale à une équation généralisée du type hypergéométrique pour laquelle $\sigma(s) = s$.

2) Il n'est pas possible de réduire l'équation initiale à une équation du type hypergéométrique par le procédé indiqué si $\sigma(z) = 1$ et l'expression $(\tilde{\tau}(z)/2)^2 - \tilde{\sigma}(z)$ est un polynôme du premier degré. On pose alors $\pi(z) = -\frac{1}{2}\tilde{\tau}(z)$, auquel cas l'équation initiale devient

$$y'' + (az + b)\, y = 0.$$

En faisant un changement linéaire $s = az + b$, on la réduit à l'équation de Lommel (voir § 13, n° 1).

**4. Equation du type hypergéométrique.**
*Equation différentielle*:

$$\sigma(z)\, y'' + \tau(z)\, y' + \lambda y = 0,$$

$\sigma(z)$ et $\tau(z)$ sont deux polynômes de degré non supérieur à 2 et à 1 respectivement, $\lambda$ est une constante. Les solutions de cette équation portent le nom de *fonctions du type hypergéométrique.*

*Forme auto-adjointe*:

$$(\sigma\rho y')' + \lambda\rho y = 0,$$

où la fonction $\rho(z)$ vérifie l'équation

$$[\sigma(z)\,\rho(z)]' = \tau(z)\,\rho(z).$$

Un changement linéaire de la variable indépendante permet généralement de réduire les équations du type hypergéométrique aux *formes canoniques* suivantes:

équation hypergéométrique:

$$z(1-z)\,y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)\,z]\,y' - \alpha\beta y = 0,$$

équation hypergéométrique dégénérée

$$zy'' + (\gamma - z)\,y' - \alpha y = 0,$$

équation d'Hermite

$$y'' - 2zy' + 2\nu y = 0.$$

*Propriété des dérivées des fonctions du type hypergéométrique $y(z)$*. Les dérivées $v_n(z) = y^{(n)}(z)$ sont des fonctions du type hypergéométrique et vérifient l'équation

$$\sigma(z)\,v_n'' + \tau_n(z)\,v_n' + \mu_n v_n = 0$$

dans laquelle

$$\tau_n(z) = \tau(z) + n\sigma'(z), \qquad \mu_n = \lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma''.$$

*Forme auto-adjointe de l'équation pour $v_n(z)$*:

$$(\sigma\rho_n v_n')' + \mu_n\rho_n v_n = 0, \qquad \rho_n(z) = \sigma^n(z)\,\rho(z).$$

*Représentations intégrales des solutions particulières $y_\nu(z)$*:

$$y_\nu(z) = \frac{C_\nu}{\rho(z)} \int_C \frac{\sigma^\nu(s)\,\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}}\,ds.$$

Ici $C_\nu$ est une constante de normalisation, la fonction $\rho(z)$ vérifie l'équation $[\sigma(z)\,\rho(z)]' = \tau(z)\,\rho(z)$, la constante $\nu$ est racine de l'équation $\lambda + \nu\tau' + \frac{\nu(\nu-1)}{2}\sigma'' = 0$, le contour $C$ est choisi de façon à vérifier la condition

$$\left.\frac{\sigma^{\nu+1}(s)\,\rho(s)}{(s-z)^{\nu+2}}\right|_{s_1}^{s_2} = 0 \quad (s_1,\ s_2 \text{ sont les extrémités du contour}).$$

Pour le choix des contours $C$, voir le § 3.

*Représentations intégrales des dérivées des solutions particulières* $y_\nu(z)$:

$$y_\nu^{(k)}(z) = \frac{C_\nu^{(k)}}{\sigma^k(z)\,\rho(z)} \int_C \frac{\sigma^\nu(s)\,\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1-k}}\, ds,$$

$$C_\nu^{(k)} = C_\nu \prod_{s=0}^{k-1} \left(\tau' + \frac{\nu+s-1}{2}\sigma''\right).$$

*Relations de récurrence et formules de dérivation pour les solutions particulières* $y_\nu(z)$. Trois fonctions quelconques $y_{\nu_i}^{(k_i)}(z)$ vérifient ensemble une relation linéaire

$$\sum_{i=1}^{3} A_i(z)\, y_{\nu_i}^{(k_i)}(z) = 0$$

aux coefficients polynomiaux $A_i(z)$ si les différences $\nu_i - \nu_j$ sont des nombres entiers. Pour le calcul des coefficients $A_i(z)$, voir le § 4.

**5. Polynômes du type hypergéométrique.** Les polynômes du type hypergéométrique $y_n(z)$ représentent des solutions polynomiales de l'équation du type hypergéométrique

$$\sigma(z)\, y'' + \tau(z)\, y' + \lambda y = 0$$

qui correspondent à

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

*Formule de Rodrigues pour les polynômes du type hypergéométrique*:

$$y_n(z) = \frac{B_n}{\rho(z)} \frac{d^n}{dz^n} [\sigma^n(z)\,\rho(z)]$$

($B_n$ est une constante de normalisation).

*Formule de Rodrigues pour les dérivées d'un polynôme du type hypergéométrique* $y_n(z)$:

$$y_n^{(m)}(z) = \frac{A_{mn} B_n}{\sigma^m(z)\,\rho(z)} \frac{d^{n-m}}{dz^{n-m}} [\sigma^n(z)\,\rho(z)],$$

$$A_{mn} = \frac{n!}{(n-m)!} \prod_{k=0}^{m-1} \left(\tau' + \frac{n+k-1}{2}\sigma''\right), \quad A_{0n} = 1, \quad A_0 = 1.$$

Par un changement linéaire de la variable indépendante, on réduit les expressions des polynômes $y_n(z)$ et des fonctions $\sigma(z)$, $\rho(z)$ aux *formes canoniques* suivantes:

1) *Polynômes de Jacobi*

$$y_n(z) = P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-z)^{-\alpha}(1+z)^{-\beta}\frac{d^n}{dz^n}[(1-z)^{n+\alpha}(1+z)^{n+\beta}],$$

$$\sigma(z) = 1-z^2, \quad \rho(z) = (1-z)^\alpha(1+z)^\beta.$$

Les cas particuliers les plus importants des polynômes de Jacobi sont:

a) les *polynômes de Legendre* $P_n(z) = P_n^{(0,0)}(z)$;

b) les *polynômes de Tchébychev* de 1[re] et de 2[e] espèce

$$T_n(z) = \frac{n!}{(1/2)_n} P_n^{(-1/2,\,-1/2)}(z) = \cos(n \arccos z),$$

$$U_n(z) = \frac{(n+1)!}{(3/2)_n} P_n^{(1/2,\,1/2)}(z);$$

c) les *polynômes de Gegenbauer*

$$C_n^\lambda(z) = \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda+1/2)_n} P_n^{(\lambda-1/2,\,\lambda-1/2)}(z).$$

Nous avons introduit la notation $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\ldots$ $\ldots(\alpha+n-1)$, $(\alpha)_0 = 1$.

2) *Polynômes de Laguerre*

$$y_n(z) = L_n^\alpha(z) = \frac{1}{n!}e^z z^{-\alpha}\frac{d^n}{dz^n}(z^{n+\alpha}e^{-z}),$$

$$\sigma(z) = z, \quad \rho(z) = z^\alpha e^{-z}.$$

3) *Polynômes d'Hermite*

$$y_n(z) = H_n(z) = (-1)^n e^{z^2}\frac{d^n}{dz^n}(e^{-z^2}),$$

$$\sigma(z) = 1, \quad \rho(z) = e^{-z^2}.$$

*Formules de dérivation* pour les polynômes de Jacobi, de Laguerre et d'Hermite:

$$\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\,\beta+1)}(x),$$

$$\frac{d}{dx}L_n^\alpha(x) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x), \qquad \frac{d}{dx}H_n(x) = 2nH_{n-1}(x).$$

Si le polynôme $\sigma(z)$ admet des racines multiples, i.e. $\sigma(z) = -(z-a)^2$, les polynômes correspondants $y_n(z)$ se laissent exprimer en fonction des polynômes de Laguerre:

$$y_n(z) = C_n(z-a)^n L_n^\alpha\left(\frac{\tau(a)}{z-a}\right), \quad \alpha = -\tau' - 2n + 1$$

($C_n$ étant une constante de normalisation).

**6. Quelques propriétés générales des polynômes orthogonaux.** Les polynômes $p_n(x)$ sont orthogonaux sur l'intervalle $]a, b[$ par rapport au poids $\rho(x)$ si

$$\int_a^b p_m(x)\, p_n(x)\, \rho(x)\, dx = 0 \quad (m \neq n).$$

*Forme explicite d'un polynôme $p_n(x)$ orthogonal sur l'intervalle $]a, b[$ par rapport au poids $\rho(x)$:*

$$p_n(x) = A_n \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & \dots & C_n \\ C_1 & C_2 & \dots & C_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{n-1} & C_n & \dots & C_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix},$$

$C_n = \int_a^b x^n \rho(x)\, dx$ est le moment de la fonction poids; $A_n$, une constante de normalisation.

*Relation de récurrence:*

$$x p_n(x) = \frac{a_n}{a_{n+1}} p_{n+1}(x) + \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) p_n(x) + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{d_n^2}{d_{n-1}^2} p_{n-1}(x).$$

Ici

$$d_n^2 = \int_a^b p_n^2(x)\, \rho(x)\, dx$$

est le carré de la norme, et $a_n$, $b_n$ les coefficients des puissances de plus haut degré du polynôme $p_n(x)$:

$$p_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots \quad (a_n \neq 0).$$

*Formule de Darboux-Christoffel:*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k(x)\, p_k(y)}{d_k^2} = \frac{1}{d_n^2} \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{p_{n+1}(x)\, p_n(y) - p_n(x)\, p_{n+1}(y)}{x - y}.$$

**7. Polynômes orthogonaux classiques.** Par *polynômes orthogonaux classiques*, on entend des polynômes du type hypergéométrique $y_n(x)$ pour lesquels la fonction $\rho(x)$ vérifie la condition

$$\sigma(x)\, \rho(x)\, x^k \big|_{x=a,b} = 0$$

($a$ et $b$ sont des nombres réels; $k = 0, 1, \dots$), et $\rho(x) > 0$ sur l'intervalle $]a, b[$. Ces polynômes sont orthogonaux par rapport

au poids $\rho(x)$ sur l'intervalle $]a, b[$, i.e.

$$\int_a^b y_m(x)\, y_n(x)\, \rho(x)\, dx = 0 \quad (m \neq n).$$

Par changement linéaire de la variable, les polynômes orthogonaux classiques se laissent réduire aux *formes canoniques suivantes*:

1) polynômes de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ pour $\alpha > -1$, $\beta > -1$;
2) polynômes de Laguerre $L_n^{\alpha}(x)$ pour $\alpha > -1$;
3) polynômes d'Hermite $H_n(x)$.

Les caractéristiques principales de ces polynômes sont résumées dans le tableau 2 (voir § 7).

*Représentations asymptotiques pour* $n \to \infty$:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) = \frac{\cos\{[n+(\alpha+\beta+1)/2]\,\theta-(2\alpha+1)\,\pi/4\}}{\sqrt{\pi n}\,(\sin(\theta/2))^{\alpha+1/2}\,(\cos(\theta/2))^{\beta+1/2}} + O(n^{-3/2})$$

$$(0 < \delta \leqslant \theta \leqslant \pi - \delta),$$

$$L_n^{\alpha}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{x/2} x^{-\alpha/2-1/4} n^{\alpha/2-1/4} \cos\left[2\sqrt{nx} - (2\alpha+1)\frac{\pi}{4}\right] + O(n^{\alpha/2-3/4})$$

$$(0 < \delta \leqslant x \leqslant N < \infty),$$

$$H_n(x) = \sqrt{2}\left(\frac{2n}{e}\right)^{n/2} e^{x^2/2}\left[\cos\left(\sqrt{2n}x - \frac{\pi n}{2}\right) + O(n^{-1/4})\right]$$

$$(|x| \leqslant N < \infty).$$

*Fonctions génératrices*:

$$(1-t)^{-\alpha-1}\exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(x)\, t^n,$$

$$\exp(2xt - t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\, \frac{t^n}{n!}.$$

P o l y n ô m e s d e L e g e n d r e. Les polynômes de Legendre $P_n(x)$ sont orthogonaux sur l'intervalle $]-1, 1[$ par rapport au poids $\rho(x) = 1$. C'est un cas particulier des polynômes de Jacobi $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ pour $\alpha = \beta = 0$ et des polynômes de Gegenbauer $C_n^{\nu}(x)$ pour $\nu = 1/2$.

*Equation différentielle*:

$$(1 - x^2)\, y'' - 2xy' + n(n+1)\, y = 0, \quad y = P_n(x).$$

*Formule de Rodrigues*:

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(1 - x^2)^n.$$

*Représentation intégrale :*

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(x + i\sqrt{1-x^2}\sin\varphi\right)^n d\varphi.$$

*Fonction génératrice :*

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n.$$

*Valeurs particulières :*

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n,$$

$$P_{2n+1}(0) = 0, \quad P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2}.$$

*Carré de la norme*

$$d_n^2 = \frac{2}{2n+1}.$$

*Relations de récurrence :*

$$(1 - x^2)\, P_n'(x) = -(n+1)\,[P_{n+1}(x) - xP_n(x)],$$

$$P_n(x) = \frac{1}{n+1}\,[P_{n+1}'(x) - xP_n'(x)] = \frac{1}{2n+1}\,[P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x)],$$

$$(n+1)\,P_{n+1}(x) - (2n+1)\,xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0.$$

*Représentation asymptotique :*

$$P_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\, \frac{\cos[(n+1/2)\,\theta - \pi/4]}{\sqrt{\sin\theta}} + O(n^{-3/2}).$$

Les courbes représentatives des polynômes de Legendre $P_n(x)$ pour quelques valeurs de $n$ sont données sur la figure 1 (voir § 7).

**8. Fonctions sphériques.**

*Equation différentielle :*

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + l(l+1)\,u = 0.$$

*Formes explicites :*

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{im\varphi}\Theta_{lm}(\cos\theta) \quad (-l \leqslant m \leqslant l),$$

$$\Theta_{lm}(x) = \frac{(-1)^l}{2^l l!}\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,(1-x^2)^{m/2}\,\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}\,(1-x^2)^l =$$

$$= \frac{(-1)^{l-m}}{2^l l!}\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}\,(1-x^2)^{-m/2}\,\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}\,(1-x^2)^l,$$

$$\Theta_{l,-m}(x) = (-1)^m\,\Theta_{lm}(x), \quad Y_{lm}^*(\theta, \varphi) = (-1)^m\,Y_{l,-m}(\theta, \varphi).$$

*Propriété d'orthogonalité :*

$$\int Y_{lm}(\theta,\ \varphi)\, Y^*_{l'm'}(\theta,\ \varphi)\, d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'}.$$

*Relation de récurrence :*

$$\cos\theta Y_{lm}(\theta,\ \varphi) = \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{4(l+1)^2 - 1}}\, Y_{l+1,\ m}(\theta,\ \varphi) + \\ + \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{4l^2 - 1}}\, Y_{l-1,\ m}(\theta,\ \varphi).$$

*Formules de dérivation :*

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} Y_{lm}(\theta,\ \varphi) = imY_{lm}(\theta,\ \varphi),$$

$$e^{\pm i\varphi}\left(\mp \frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta} + m \operatorname{cotg}\theta Y_{lm}\right) = \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}\, Y_{l,\ m\pm 1}$$

(pour $m = \pm(l+1)$ on posera $Y_{lm}(\theta,\ \varphi) = 0$).

*Développement d'un polynôme homogène quelconque de degré $l$ suivant les fonctions sphériques:*

$$u_l(x,\ y,\ z) = r^l \sum_{m,\ n} C_{mn} Y_{l-2n,\ m}(\theta,\ \varphi).$$

*Développement d'un polynôme harmonique homogène quelconque de degré $l$ suivant les fonctions sphériques:*

$$u_l(x,\ y,\ z) = r^l \sum_{m=-l}^{l} C_{lm} Y_{lm}(\theta,\ \varphi).$$

*Théorème d'addition :*

$$P_l(\cos\omega) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta_1,\ \varphi_1)\, Y^*_{lm}(\theta_2,\ \varphi_2)$$

($\omega$ est l'angle entre deux vecteurs $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ dont les directions sont caractérisées par les angles $\theta_1$, $\varphi_1$ et $\theta_2$, $\varphi_2$),

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\omega) = \\ = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta_1,\ \varphi_1)\, Y^*_{lm}(\theta_2,\ \varphi_2)\right],$$

$$r_< = \min(r_1,\ r_2), \qquad r_> = \max(r_1,\ r_2).$$

*Fonctions sphériques généralisées.* Une rotation du système de coordonnées définie par les angles d'Euler $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ transforme les

fonctions sphériques $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ de la façon suivante:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{m'=-l}^{l} D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma)\, Y_{lm'}(\theta', \varphi').$$

Les coefficients $D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma)$ s'appellent *fonctions sphériques généralisées d'ordre l.*

*Forme explicite des fonctions* $D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma)$:

$$D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{i(m\alpha + m'\gamma)} d^l_{mm'}(\beta),$$

$$d^l_{mm'}(\beta) = \frac{1}{2^m} \sqrt{\frac{(l+m)!\,(l-m)!}{(l+m')!\,(l-m')!}} \times$$

$$\times (1-x)^{\frac{m-m'}{2}} (1+x)^{\frac{m+m'}{2}} P^{(m-m',\, m+m')}_{l-m}(x),$$

$P^{(\alpha,\beta)}_n(x)$ est un polynôme de Jacobi, $x = \cos\beta$.

*Relation entre les fonctions sphériques généralisées et les fonctions sphériques*:

$$D^l_{m0}(\alpha, \beta, \gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, Y_{lm}(\beta, \alpha),$$

$$D^l_{0m}(\alpha, \beta, \gamma) = (-1)^m \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, Y_{lm}(\beta, \gamma),$$

$$D^l_{00}(\alpha, \beta, \gamma) = P_l(\cos\beta).$$

**9. Polynômes orthogonaux classiques d'une variable discrète.** Par polynômes orthogonaux classiques d'une variable discrète, on entend des polynômes $y_n(x)$ qui vérifient l'équation aux différences

$$\sigma(x)\, \Delta\nabla y + \tau(x)\, \Delta y + \lambda y = 0$$

et tels que la fonction $\rho(x)$, solution de l'équation aux différences

$$\Delta [\sigma(x)\, \rho(x)] = \tau(x)\, \rho(x),$$

vérifie la condition

$$\sigma(x)\, \rho(x)\, x^k \,|_{x=a,\, b} = 0$$

($a$, $b$ deux nombres réels, $b - a$ entier, $k = 0, 1, \ldots$), et $\rho(x) > 0$ sur l'intervalle $]a, b[$ . Ici

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x), \quad \nabla f(x) = f(x) - f(x-1),$$

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''.$$

Ces polynômes sont orthogonaux par rapport au poids $\rho(x)$ sur l'intervalle $]a, b[$ au sens suivant:

$$\sum_i y_m(x_i)\, y_n(x_i)\, \rho(x_i) = 0 \quad (m \neq n).$$

La sommation est faite suivant des $i$ tels que $a \leqslant x_i \leqslant b - 1$.

*Formule de Rodrigues*:

$$y_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \Delta^n \left[ \rho(x) \prod_{k=0}^{n-1} \sigma(x-k) \right].$$

Toutes les propriétés des polynômes $p_n(x)$ orthogonaux sur l'intervalle $]a, b[$ avec le poids $\rho(x)$ se conservent dans le cas des polynômes orthogonaux classiques d'une variable discrète, à condition de faire la sommation suivant les valeurs discrètes de la variable indépendante au lieu d'intégrer sur l'intervalle $]a, b[$ dans les formules correspondantes.

Les caractéristiques principales des polynômes orthogonaux classiques d'une variable discrète — polynômes de Hahn $h_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, polynômes de Tchébychev $t_n(x)$, polynômes de Meixner $m_n^{(\gamma, \mu)}(x)$, polynômes de Krawtchouk $k_n^{(p)}(x)$, polynômes de Charlier $c_n^{(\mu)}(x)$ — sont résumées dans les tableaux 3a et 3b (voir § 12).

**10. Quelques fonctions spéciales voisines des fonctions de deuxième espèce $Q_0(z)$ pour les polynômes orthogonaux classiques.**

a) Fonction gamma incomplète:

$$\Gamma(a, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{a-1}\, dt.$$

Changeant $t$ en $x(1+s)$, l'intégrale ci-dessus se réduit à la représentation intégrale de la fonction hypergéométrique dégénérée de deuxième espèce $G(\alpha, \gamma, x)$:

$$\Gamma(a, x) = e^{-x} x^a G(1, 1+a, x).$$

Fonction bêta incomplète:

$$B_x(p, q) = \int_0^x t^{p-1} (1-t)^{q-1}\, dt.$$

Changeant $t$ en $xs$, l'intégrale pour $B_x(p, q)$ se réduit à la représentation intégrale de la fonction hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$:

$$B_x(p, q) = \frac{1}{p} x^p F(p, 1-q, 1+p, x).$$

b) Exponentielle intégrale:

$$E_m(z) = \int_1^\infty \frac{e^{-zs}}{s^m}\, ds, \quad \operatorname{Re} z > 0 \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

*Relation de récurrence et formule de dérivation:*

$$E_m(z) = \frac{1}{m-1}\,[e^{-z} - zE_{m-1}(z)],$$

$$E'_m(z) = -E_{m-1}(z).$$

*Développement en série de* $E_1(z)$:

$$E_1(z) = -\gamma - \ln z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\,\frac{z^k}{k!}$$

($\gamma$ est la constante d'Euler).

*Représentation asymptotique:*

$$E_m(z) = \frac{e^{-z}}{z}\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (m)_k}{z^k} + O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right)\right],$$

$$(m)_k = m(m+1)\,\ldots\,(m+k-1), \quad (m)_0 = 1.$$

*Relation entre* $E_1(z)$ *et la fonction exponentielle intégrale* Ei $(z)$:

$$E_1(z) = -\mathrm{Ei}(-z).$$

c) Sinus et cosinus intégraux:

$$\mathrm{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin s}{s}\,ds, \quad \mathrm{Ci}(z) = \int_\infty^z \frac{\cos s}{s}\,ds.$$

*Développements en séries de puissances:*

$$\mathrm{Si}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!},$$

$$\mathrm{Ci}(z) = \gamma + \ln z - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^{2k}}{(2k)(2k)!}$$

($\gamma$ est la constante d'Euler).

*Représentations asymptotiques:*

$$\mathrm{Si}(z) = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos z}{z}\,P(z) - \frac{\sin z}{z}\,Q(z),$$

$$\mathrm{Ci}(z) = \frac{\sin z}{z}\,P(z) - \frac{\cos z}{z}\,Q(z),$$

où

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2k)!}{z^{2k}} + O(z^{-2n-2}),$$

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2k+1)!}{z^{2k+1}} + O(z^{-2n-3}).$$

d) Fonction des erreurs:

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-s^2}\,ds.$$

*Développement en série de puissances*:

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{k!\,(2k+1)}.$$

*Représentation asymptotique*:

$$\Phi(z)=1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-z^2}}{z}\left[1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{1\cdot 3\cdot\ \dots\ \cdot(2k-1)}{(2z^2)^k}+O\left(z^{-2n-2}\right)\right]$$

$$\left(|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2}-\delta\right).$$

e) Intégrales de Fresnel:

$$S(z)=\int_0^z \sin\frac{\pi s^2}{2}\,ds,\qquad C(z)=\int_0^z \cos\frac{\pi s^2}{2}\,ds.$$

*Relation avec la fonction des erreurs*:

$$C(z)-iS(z)=\int_0^z e^{-i\pi t^2/2}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2i}}\,\Phi\left(\sqrt{i\frac{\pi}{2}}\,z\right).$$

Cette relation permet d'obtenir le comportement asymptotique et le développement en séries des intégrales de Fresnel.

**11. Fonctions cylindriques.**

a) Fonctions de Bessel.

*Equation de Bessel*:

$$z^2u''+zu'+(z^2-\nu^2)\,u=0,$$

$u=Z_\nu(z)$ est une fonction cylindrique d'ordre $\nu$.

*Equation de Lommel*:

$$v''+\frac{1-2\alpha}{z}v'+\left[(\beta\gamma z^{\gamma-1})^2+\frac{\alpha^2-\nu^2\gamma^2}{z^2}\right]v=0,$$

$$v(z)=z^{\alpha}Z_\nu(\beta z^{\gamma}).$$

*Représentations intégrales de Poisson* pour les fonctions de Bessel de première espèce $J_\nu(z)$ et les fonctions de Hankel $H_\nu^{(1,2)}(z)$:

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\nu-1/2} \cos zt\, dt, \quad \operatorname{Re}\nu > -1/2,$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\frac{e^{i(z-\pi\nu/2-\pi/4)}}{\Gamma(\nu+1/2)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1/2}\left(1+\frac{it}{2z}\right)^{\nu-1/2} dt,$$

$$\operatorname{Re}\nu > -1/2,$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\frac{e^{-i(z-\pi\nu/2-\pi/4)}}{\Gamma(\nu+1/2)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1/2}\left(1-\frac{it}{2z}\right)^{\nu-1/2} dt,$$

$$\operatorname{Re}\nu > -1/2.$$

*Représentations intégrales de Sommerfeld*:

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{C_1} e^{iz\sin\varphi - i\nu\varphi}\, d\varphi,$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{C_+} e^{iz\sin\varphi - i\nu\varphi}\, d\varphi,$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{1}{\pi}\int_{C_-} e^{iz\sin\varphi - i\nu\varphi}\, d\varphi$$

(les contours $C_1$, $C_+$, $C_-$ sont représentés sur les figures 8 et 9, voir § 15),

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\sin\varphi - in\varphi}\, d\varphi,$$

$$e^{iz\sin\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\, e^{in\varphi}.$$

*Représentations asymptotiques*:

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\cos\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{z}\right)\sin z + {} \right.$$
$$\left. {} + O\left(\frac{1}{z}\right)\cos z\right],$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{i(z-\pi\nu/2-\pi/4)}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right],$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{-i(z-\pi\nu/2-\pi/4)}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right].$$

*Relations entre différentes fonctions cylindriques:*

$$H_{-\nu}^{(1)}(z) = e^{i\pi\nu}H_{\nu}^{(1)}(z), \qquad H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-i\pi\nu}H_{\nu}^{(2)}(z),$$

$$J_{\nu}(z) = \frac{1}{2}[H_{\nu}^{(1)}(z) + H_{\nu}^{(2)}(z)], \qquad Y_{\nu}(z) = \frac{1}{2i}[H_{\nu}^{(1)}(z) - H_{\nu}^{(2)}(z)],$$

$$H_{\nu}^{(1)}(z) = \frac{J_{-\nu}(z) - e^{-i\pi\nu}J_{\nu}(z)}{i\sin\pi\nu}, \qquad H_{\nu}^{(2)}(z) = \frac{e^{i\pi\nu}J_{\nu}(z) - J_{-\nu}(z)}{i\sin\pi\nu},$$

$$Y_{\nu}(z) = \frac{\cos\pi\nu J_{\nu}(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu}, \qquad J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z).$$

*Développements en séries:*

$$J_{\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{\nu+2k}}{k!\Gamma(\nu+k+1)},$$

$$H_n^{(1,2)}(z) = J_n(z) \pm \frac{i}{\pi}\left\{2J_n(z)\ln\frac{z}{2} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!}[\psi(n+k+1) + \psi(k+1)]\right\},$$

$$Y_n(z) = \frac{1}{\pi}\left\{2J_n(z)\ln\frac{z}{2} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!}[\psi(n+k+1) + \psi(k+1)]\right\}$$

(pour $n = 0$ on admet que la première somme s'annule, $\psi(z)$ est la dérivée logarithmique de la fonction gamma).

Les courbes représentatives des fonctions $J_n(x)$ et $Y_n(x)$ pour quelques valeurs de $n$ sont données sur les figures 10 et 11 (voir § 16).

*Relations de récurrence et formules de dérivation:*

$$Z_{\nu-1}(z) + Z_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} Z_{\nu}(z),$$

$$Z_{\nu-1}(z) - Z_{\nu+1}(z) = 2Z'_{\nu}(z),$$

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n [z^{\nu}Z_{\nu}(z)] = z^{\nu-n}Z_{\nu-n}(z),$$

$$\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n [z^{-\nu}Z_{\nu}(z)] = z^{-(\nu+n)}Z_{\nu+n}(z)$$

($Z_{\nu}(z)$ est l'une quelconque des fonctions $J_{\nu}(z)$, $Y_{\nu}(z)$, $H_{\nu}^{(1,2)}(z)$).

*Fonctions de Bessel d'ordre demi-entier:*

$$J_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z,\quad Y_{1/2}(z)=-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z,$$

$$H_{1/2}^{(1,\,2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{\pm i(z-\pi/2)},$$

$$H_{n-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,z^n\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n\cos z\qquad(n=0,\ 1,\ \ldots),$$

$$H_{n-1/2}^{(1,\,2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,z^n\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n e^{\pm iz}\qquad(n=0,\ 1,\ \ldots),$$

$$Y_{n-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,z^n\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n\sin z\qquad(n=0,\ 1,\ \ldots).$$

*Intégrale de Fourier-Bessel:*

$$f(x)=\int_0^\infty kF(k)\,J_\nu(k)\,dk,$$

$$F(k)=\int_0^\infty xf(x)\,J_\nu(kx)\,dx.$$

*Théorème d'addition de Graf:*

$$Z_\nu(kR)\,e^{i\nu\psi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(kr)\,Z_{\nu+n}(k\rho)\,e^{in\theta}\qquad(r<\rho).$$

*Théorème d'addition de Gegenbauer:*

$$\frac{Z_\nu(kR)}{(kR)^\nu}=2^\nu\Gamma(\nu)\sum_{n=0}^{\infty}(\nu+n)\frac{J_{\nu+n}(kr)}{(kr)^\nu}\,\frac{Z_{\nu+n}(k\rho)}{(k\rho)^\nu}\,C_n^\nu(\mu)\qquad(r<\rho).$$

Ici $r$, $\rho$, $R$ sont les côtés d'un triangle arbitraire, $\psi$ l'angle formé par $R$ et $\rho$, $\mu=\cos\theta$, $\theta$ l'angle formé par $r$ et $\rho$, $k$ un nombre quelconque, $C_n^\nu(\mu)$ un polynôme de Gegenbauer, $Z_\nu(z)$ l'une quelconque des fonctions $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$, $H_\nu^{(1,\,2)}(z)$, $r<\rho$.

*Développement d'une onde sphérique suivant les polynômes de Legendre* (voir le théorème d'addition de Gegenbauer):

$$\frac{e^{ikR}}{R}=i\pi\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}}\,\frac{H_{n+1/2}^{(1)}(k\rho)}{\sqrt{\rho}}\,P_n(\mu).$$

*Développement d'une onde plane suivant les polynômes de Legendre:*

$$e^{ikr}\sqrt{\frac{2\pi}{kr}}\sum_{n=0}^{\infty}i^n\left(n+\frac{1}{2}\right)J_{n+1/2}(kr)\,P_n(\mu)$$

($\boldsymbol{k}$ est le vecteur onde, $\mu=\cos\theta$, $\theta$ l'angle entre les vecteurs $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{r}$).

b) Fonctions de Bessel modifiées.

*Equation différentielle:*

$$z^2 u'' + z u' - (z^2 + \nu^2) u = 0, \quad u(z) = Z_\nu(iz).$$

Pour $z > 0$ cette équation différentielle admet comme solutions linéairement indépendantes les fonctions

$$I_\nu(z) = e^{-i\pi\nu/2} J_\nu(iz), \quad K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} e^{i\pi(\nu+1)/2} H_\nu^{(1)}(iz).$$

*Représentations intégrales de Poisson* ($\operatorname{Re}\nu > -1/2$):

$$I_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu + 1/2)} \int_{-1}^{1} \operatorname{ch} zs\,(1 - s^2)^{\nu - 1/2}\, ds,$$

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z} \frac{1}{\Gamma(\nu + 1/2)} \int_0^\infty e^{-s} s^{\nu - 1/2} \left(1 + \frac{s}{2z}\right)^{\nu - 1/2} ds.$$

*Représentations intégrales de Sommerfeld pour* $K_\nu(z)$:

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z \operatorname{ch}\psi + \nu\psi}\, d\psi = \int_0^\infty e^{-z \operatorname{ch}\psi} \operatorname{ch}\nu\psi\, d\psi, \qquad \operatorname{Re} z > 0,$$

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\infty e^{-t - \frac{z^2}{4t}}\, t^{-\nu - 1}\, dt \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

*Comportement asymptotique pour* $z \to +\infty$:

$$I_\nu(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right], \quad K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right].$$

*Relation entre les fonctions* $I_\nu(z)$ *et* $K_\nu(z)$ *pour différentes valeurs de* $\nu$:

$$I_{-n}(z) = I_n(z), \quad K_{-\nu}(z) = K_\nu(z),$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \pi\nu}.$$

*Développements en séries:*

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{\nu + 2k}}{k!\,\Gamma(k + \nu + 1)},$$

$$K_n(z) = (-1)^{n+1} I_n(z) \ln \frac{z}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n - k - 1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k - n} +$$

$$+ \frac{1}{2}(-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+n}}{k!\,(k+n)!} [\psi(n + k + 1) + \psi(k + 1)]$$

(pour $n = 0$ on admet que la première somme est nulle).

*Relations de récurrence et formules de dérivation:*

$$I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} I_\nu(z),$$

$$I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z) = 2I'_\nu(z), \quad I'_0(z) = I_1(z),$$

$$K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) = -\frac{2\nu}{z} K_\nu(z),$$

$$K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) = -2K'_\nu(z), \quad K'_0(z) = -K_1(z).$$

*Fonctions $I_\nu(z)$ et $K_\nu(z)$ d'ordre demi-entier:*

$$I_{n-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, z^n \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n \operatorname{ch} z \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

$$K_{n-1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, z^n \left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n e^{-z} \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Les courbes représentatives des fonctions $I_n(x)$ et $K_n(x)$ pour quelques valeurs de $n$ sont données sur les figures 12 et 13 (voir § 16).

**12. Fonctions hypergéométriques $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$.**

*Equation différentielle:*

$$z(1 - z)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]\, y' - \alpha\beta y = 0.$$

*Solutions particulières:*

a) $y_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, z)$,

$y_2 = z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, z)$

$(\gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$;

b) $y_1 = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - z)$,

$y_2 = (1 - z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - z)$;

c) $y_1 = z^{-\alpha} F(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1, 1/z)$,

$y_2 = z^{-\beta} F(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1, 1/z)$.

*Représentation intégrale:*

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - a)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{-\beta}\, dt,$$

$$\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0.$$

*Développement en série:*

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1,$$

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1)\ldots(a+n-1).$$

*Formule de dérivation*:

$$\frac{dF(\alpha, \beta, \gamma, z)}{dz} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, z).$$

*Relations de récurrence*. Trois fonctions hypergéométriques quelconques $F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, z)$, $F(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, z)$ et $F(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, z)$, dans le cas où les différences $\alpha_i - \alpha_k$, $\beta_i - \beta_k$, $\gamma_i - \gamma_k$ sont des nombres entiers, vérifient ensemble des relations linéaires dont les coefficients sont des polynômes en $z$ (les relations de récurrence sont déduites au § 20).

*Relations fonctionnelles*:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = F(\beta, \alpha, \gamma, z),$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, z),$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-z) +$$

$$+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-z),$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} (-z)^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, \frac{1}{z}\right) +$$

$$+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} (-z)^{-\beta} F\left(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1, \frac{1}{z}\right),$$

$$|\arg(-z)| < \pi.$$

La dernière relation fonctionnelle et le développement en série des fonctions hypergéométriques d'argument $1/z$ donnent lieu à la représentation asymptotique de la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ pour $z \to \infty$.

Les différentes combinaisons des trois dernières relations fonctionnelles conduisent à de nouvelles relations fonctionnelles:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) =$$

$$= (1-z)^{-\alpha} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\beta)} F\left(\alpha, \gamma-\beta, 1+\alpha-\beta, \frac{1}{1-z}\right) +$$

$$+ (1-z)^{-\beta} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\alpha)} F\left(\gamma-\alpha, \beta, 1-\alpha+\beta, \frac{1}{1-z}\right)$$

$$(|\arg(-z)| < \pi, \quad |\arg(1-z)| < \pi),$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) =$$

$$= z^{-\alpha} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} F\left(\alpha, 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha+\beta-\gamma, \frac{z-1}{z}\right) +$$

$$+ z^{\alpha-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \times$$

$$\times F\left(\gamma-\alpha, 1-\alpha, 1+\gamma-\alpha-\beta, \frac{z-1}{z}\right)$$

$$(|\arg z| < \pi, \quad |\arg(1-z)| < \pi),$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1-z)^{-\alpha} F(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, z/(z-1)), \quad |\arg(1-z)| < \pi,$$
$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1-z)^{-\beta} F(\gamma-\alpha, \beta, \gamma, z/(z-1)), \quad |\arg(1-z)| < \pi.$$

Les cas particuliers des relations fonctionnelles sont notés dans le § 20.

*Expression de différentes fonctions à l'aide de la fonction hypergéométrique*:

$$F(\alpha, 0, \gamma, z) = 1,$$

$$F(\alpha, \beta, \beta, z) = (1-z)^{-\alpha},$$

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)} F\left(-n, n+\alpha+\beta+1, \alpha+1, \frac{1-z}{2}\right) = \frac{(-1)^n \Gamma(n+\beta+1)}{n!\,\Gamma(\beta+1)} F\left(-n, n+\alpha+\beta+1, \beta+1, \frac{1+z}{2}\right),$$

$$P_n(z) = F\left(-n, n+1, 1, \frac{1-z}{2}\right) = (-1)^n F\left(-n, n+1, 1, \frac{1+z}{2}\right),$$

$$K(z) = \int_0^{\pi/2} (1-z^2\sin^2\varphi)^{-1/2} d\varphi = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z^2\right),$$

$$E(z) = \int_0^{\pi/2} (1-z^2\sin^2\varphi)^{1/2} d\varphi = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, z^2\right).$$

**13. Fonctions hypergéométriques dégénérées $F(\alpha, \gamma, z)$ et $G(\alpha, \gamma, z)$.**

*Equation différentielle*:

$$zy'' + (\gamma - z)y' - \alpha y = 0.$$

*Solutions particulières*:

a) $y_1 = F(\alpha, \gamma, z)$,
$y_2 = z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z)$;

b) $y_1 = G(\alpha, \gamma, z)$;
$y_2 = e^z G(\gamma - \alpha, \gamma, -z)$.

*Représentations intégrales*:

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1} e^{zt}\,dt \quad (\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0),$$

$$G(\alpha, \gamma, z) = \frac{z^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\gamma-\alpha-1} dt \quad (\operatorname{Re}\alpha > 0),$$

$$G(\alpha, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-zs} s^{\alpha-1}(1+s)^{\gamma-\alpha-1} ds \quad (\operatorname{Re} z > 0, \ \operatorname{Re}\alpha > 0).$$

*Développement en série*:

$$F(\alpha, \gamma, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!}.$$

*Formules de dérivation*:

$$\frac{d}{dz} F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\alpha}{\gamma} F(\alpha+1, \gamma+1, z),$$

$$\frac{d}{dz} G(\alpha, \gamma, z) = -\alpha G(\alpha+1, \gamma+1, z),$$

$$\frac{d}{dz} [z^\alpha G(\alpha, \gamma, z)] = -\frac{\gamma-\alpha-1}{z^2} [z^\alpha G(\alpha, \gamma-1, z)].$$

*Relations de récurrence*. Trois fonctions hypergéométriques dégénérées quelconques $F(\alpha_1, \gamma_2, z)$, $F(\alpha_2, \gamma_2, z)$, $F(\alpha_3, \gamma_3, z)$, dans le cas où les différences $\alpha_i - \alpha_k$, $\gamma_i - \gamma_k$ sont des nombres entiers, vérifient ensemble des relations linéaires dont les coefficients sont des polynômes en $z$. Il en est de même pour la fonction $G(\alpha, \gamma, z)$ (pour l'établissement des relations de récurrence, voir le § 20).

*Relations fonctionnelles*:

$$F(\alpha, \gamma, z) = e^z F(\gamma-\alpha, \gamma, -z),$$

$$G(\alpha, \gamma, z) = z^{1-\gamma} G(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z),$$

$$G(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)} F(\alpha, \gamma, z) + \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z),$$

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} e^{\pm i\pi\alpha} G(\alpha, \gamma, z) + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^{z \pm i\pi(\alpha-\gamma)} G(\gamma-\alpha, \gamma, -z)$$

(le signe positif correspond à $\operatorname{Im} z > 0$).

Des cas particuliers des relations fonctionnelles sont notés dans le § 20, n° 4.

*Représentations asymptotiques pour* $z \to \infty$:

$$G(\alpha, \gamma, z) = z^{-\alpha} [1 + O(1/z)],$$

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} (-z)^{-\alpha} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right] + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\gamma} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$

$$(|\arg z| \leqslant \pi, \quad |\arg(-z)| \leqslant \pi).$$

*Expression de différentes fonctions à l'aide de la fonction hypergéométrique dégénérée:*

$$F(0,\ \gamma,\ z) = G(0,\ \gamma,\ z) = 1,$$

$$F(\alpha,\ \alpha,\ z) = e^{z},$$

$$G(\alpha,\ \alpha+1,\ z) = z^{-\alpha},$$

$$L_n^{\alpha}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)} F(-n,\ 1+\alpha,\ x),$$

$$I_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} e^{-z} F\left(\nu+\frac{1}{2},\ 2\nu+1,\ 2z\right),$$

$$K_\nu(z) = \sqrt{\pi}\,(2z)^\nu e^{-z} G\left(\nu+\frac{1}{2},\ 2\nu+1,\ 2z\right).$$

**14. Fonctions d'Hermite $H_\nu(z)$.**

*Equation différentielle:*

$$y'' - 2zy' + 2\nu y = 0.$$

*Solutions particulières:*

a) $y_1 = H_\nu(z),\quad y_2 = H_\nu(-z)$;

b) $y_1 = e^{z^2} H_{-\nu-1}(iz),\quad y_2 = e^{z^2} H_{-\nu-1}(-iz)$.

*Relation avec les fonctions hypergéométriques dégénérées:*

$$H_\nu(z) = 2^\nu G(-\nu/2,\ z^2) \qquad (|\arg z| \leqslant \pi/2),$$

$$H_\nu(z) = \frac{2^\nu \Gamma(1/2)}{\Gamma((1-\nu)/2)} F\left(-\frac{\nu}{2},\ \frac{1}{2},\ z^2\right) + \frac{2^\nu \Gamma(-1/2)}{\Gamma(-\nu/2)} zF\left(\frac{1-\nu}{2},\ \frac{3}{2},\ z^2\right).$$

*Représentation intégrale:*

$$H_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_0^\infty e^{-t^2-2zt} t^{-\nu-1}\, dt.$$

*Développement en série:*

$$H_\nu(z) = \frac{1}{2\Gamma(-\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Gamma\left(\frac{n-\nu}{2}\right) \frac{z^n}{n!}.$$

*Formule de dérivation:*

$$H'_\nu(z) = 2\nu H_{\nu-1}(z).$$

*Relation de récurrence:*

$$H_\nu(z) - 2zH_{\nu-1}(z) + 2(\nu-1) H_{\nu-2}(z) = 0.$$

*Relations fonctionnelles*:

$$H_\nu(z) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}} e^{z^2} [e^{i\frac{\pi\nu}{2}} H_{-\nu-1}(iz) + e^{-i\frac{\pi\nu}{2}} H_{-\nu-1}(-iz)],$$

$$H_\nu(z) = e^{i\pi\nu} H_\nu(-z) + \frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{z^2 + i\frac{\pi(\nu+1)}{2}} H_{-\nu-1}(-iz),$$

$$H_\nu(z) = e^{-i\pi\nu} H_\nu(-z) + \frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{z^2 - i\frac{\pi(\nu+1)}{2}} H_{-\nu-1}(iz).$$

*Représentations asymptotiques pour* $z \to \infty$ :

$$H_\nu(z) = (2z)^\nu \left[1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right] \quad \left(|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

$$H_\nu(z) = (2z)^\nu \left[1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right] + \frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{z^2} (-2z)^{-\nu-1} \left[1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right]$$

$$(\pi/2 \leqslant |\arg z| \leqslant \pi, \quad |\arg(-z)| < \pi/2).$$

## LITTÉRATURE


1. BATEMAN H., ERDÉLYI A. Higher transcendental functions. New York, McGraw-Hill, 1955.
2. BETHE H., SALPETER E. Quantum mechanics of one- and two-electron atoms. Berlin, a. o. Springer-Verl., 1957.
3. WATSON G. N. A treatise of the theory of Bessel functions. Cambridge univ. press, Cambridge, 1944.
4. VILENKIN N. I. Special functions and the theory of group representations. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1968.
5. VLADIMIROV V. S. Equations of mathematical physics. M., « Mir », 1983.
6. GELFAND I. M., MINLOS R. A., SHAPIRO Z. Ya. Representations of the rotation and Lorentz groups and their applications. Pergamon Press, Oxford, 1963.
7. HOBSON E. W. The theory of spherical and ellipsoidal harmonics. Cambridge univ. press, Cambridge, 1931.
8. ЕВГРАФОВ М. А. Аналитические функции. М., Наука, 1968 (EVGRAFOV M. Fonctions analytiques. M., « Naouka », 1968).
9. LAVRENTIEV M., CHABAT B. Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe. M., « Mir », 1972.
10. LANDAU L., LIFCHITZ E. Mécanique quantique. Théorie non relativiste. Vol. III. M., « Mir », 1974.
11. ЛЕБЕДЕВ Н. Н. Специальные функции и их приложения. М., Физматгиз, 1963 (LÉBÉDEV N. Fonctions spéciales et leurs applications. M., « Fizmatguiz », 1963).
12. NIKIFOROV A., OUVAROV V. Eléments de théorie des fonctions spéciales. M., « Mir », 1976.
13. SVESHNIKOV A., TIKHONOV A. The Theory of Functions of a Complexe Variable. M., « Mir », 1978.
14. SZEGÖ G. Orthogonal Polynomials. American mathematical society, Providence, R. I., 4th edition, 1975.
15. СИДОРОВ Ю. В., ФЕДОРЮК М. В., ШАБУНИН М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М., « Наука », 1976. (SIDOROV Yu., FÉDORIOUK M., CHABOUNINE M. Leçons de théorie des fonctions d'une variable complexe. M., « Naouka », 1976).
16. СУЕТИН П. К. Классические ортогональные многочлены М., « Наука », 1979 (SOUÉTINE P. Polynômes orthogonaux classiques. M., « Naouka », 1979).
17. TIJONOV A., SAMARSKI A. Ecuaciones de la fisica matematica. M., « Mir », 1983.
18. TRICOMI F. G. Differential equations. Blackie, 1961.
19. WHITTAKER E. T., WATSON G. N. A course of modern analysis. Cambridge univ. press, Cambridge, 1952.
20. SCHIFF L. Quantum mechanics. New York, McGraw-Hill, 1955.

21. JAHNKE E., EMDE F., LÖSCH F. Fafeln höherer Funktionen. Stuttgart, 1960.
22. BECKMAN P. Orthogonal polynomials for engineers and physicists. Boulder, Colorado, The Golem Press, 1973.
23. Handbook of mathematical functions, edited by Milton ABRAMOWITZ and Irene A. STEGUN. National Bureau of Standards, Dover Paris inc. New York, 1965.
24. HOCHSTADT H. Special functions of mathematical physics. New York, Holt, Rinehart and Winston, 1961.
25. LUKE Y. L. The special functions and their approximations. Vol. 1-4. New York — London, Academic Press, 1969.
26. OLWER F. W. J. Asymptotics and special functions. New York, Academic Press, 1974.
27. RAINVILLE E. D. Special functions. New York, Macmillan, 1960.
28. SNEDDON I. N. Special functions of mathematical physics and chemistry. New York, Wiley-Interscience, 1956.
29. WALLACE P. R. Mathematical analysis of physical problems. McGill University, Holt, Rinehart and Winston, 1972.
30. WIGNER E. P. The application of group theory to the special functions of mathematical physics. Princeton lectures, part I, II, spring, 1955.
31. MILLER W. Encyclopaedia of mathematics and its applications. Vol. IV. Symmetry and separation of variables. Section: Special functions. Addison-Wesley, 1978.

Le lecteur trouvera une bibliographie plus complète sur les fonctions spéciales dans [1], [4], [11], [21] à [27].

# INDEX DES NOTATIONS

| | |
|---|---|
| $a_n$ | coefficient du terme de plus haut degré du polynôme $p_n(x)$ |
| Ci $(x)$ | fonction cosinus intégral |
| $C_n^\lambda(x)$ | polynômes de Gegenbauer |
| $c_n^\mu(x)$ | polynômes de Charlier |
| $D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma)$ | fonction sphérique généralisée d'ordre $l$ |
| $d_n^2$ | carré de la norme du polynôme orthogonal |
| $E_m(z)$ | exponentielle intégrale |
| $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ | fonction hypergéométrique |
| $F(\alpha, \gamma, z)$ | fonction hypergéométrique dégénérée de première espèce |
| $G(\alpha, \gamma, z)$ | fonction hypergéométrique degénérée de deuxième espèce |
| $H_n(x)$ | polynômes d'Hermite |
| $H_\nu(z)$ | fonction d'Hermite |
| $H_\nu^{(1)}(z)$ | fonction de Hankel de première espèce d'ordre $\nu$ |
| $H_\nu^{(2)}(z)$ | fonction de Hankel de deuxième espèce d'ordre $\nu$ |
| $h_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ | polynômes de Hahn |
| $I_\nu(z)$ | fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre $\nu$ |
| $J_\nu(z)$ | fonction de Bessel de première espèce d'ordre $\nu$ |
| $K_\nu(z)$ | fonction de Macdonald |
| $k_n^{(p)}(x)$ | polynômes de Krawtchouk |
| $L_n^\alpha(x)$ | polynômes de Laguerre |
| $m_n^{(\gamma, \mu)}(x)$ | polynômes de Meixner |
| $P_n(x)$ | polynômes de Legendre |
| $P_n^m(x)$ | fonction de Legendre associée |
| $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ | polynômes de Jacobi |
| $Q_n(z)$ | fonction de deuxième espèce pour les polynômes orthogonaux classiques |
| Si $(z)$ | fonction sinus intégral |
| $T_n(x)$ | polynômes de Tchébychev de première espèce |
| $t_n(x)$ | polynômes de Tchébychev d'une variable discrète |
| $U_n(x)$ | polynômes de Tchébychev de deuxième espèce |
| $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ | fonction sphérique d'ordre $l$ |
| $Y_\nu(z)$ | fonction de Bessel de deuxième espèce d'ordre $\nu$ |
| $\mathrm{B}(x, y)$ | fonction bêta |
| $\Gamma(z)$ | fonction gamma |
| $\gamma$ | constante d'Euler |
| $\Phi(z)$ | fonction des erreurs |
| $\psi(z)$ | dérivée logarithmique de la fonction gamma |

## INDEX DES MATIÈRES

## À NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.

*Notre adresse*:
2, Pervi Rijski péréoulok,
Moscou, I-110, GSP, U.R.S.S.

*Imprimé en Union Soviétique*

**INTRODUCTION AUX MATHÉMATIQUES DISCRÈTES**

**par S. YABLONSKI**

Le livre de S. Yablonski, membre correspondant de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S., est une introduction aux mathématiques discrètes, une branche qui est en pleine expansion et constitue la base de la cibernétique mathématique. Cet ouvrage a été écrit sur la base du cours professé par l'auteur durant de longues années à la faculté de calcul numérique et de cybernétique de l'Université de Moscou.

S'adresse aux élèves du second et du troisième cycle, ainsi qu'aux ingénieurs et chercheurs en mathématiques appliquées.

**AIDE-MÉMOIRE DE THÉORIE DES PROBABILITÉS ET DE STATISTIQUE MATHÉMATIQUE**

par V. KOROLIOUK et coll.

Cet ouvrage, publié sous la direction de V. Koroliouk, de l'Académie des Sciences de l'Ukraine, traite des éléments de théorie des probabilités, de théorie des processus aléatoires et de statistique mathématique. Il décrit également les méthodes et les idées à la base des raisonnements probabilistes. Il définit lés notions d'espace probabilisé, de variable aléatoire, de processus et de champs aléatoires, d'espérance mathématique, de probabilités conditionnelles. Il cite les plus importantes méthodes de vérification des hypothèses statistiques et de construction des estimateurs des paramètres pour les répartitions des variables et des processus aléatoires.

Destiné aux chercheurs, ingénieurs, boursiers de thèse et étudiants.

**MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES**

(en deux volumes)

par **Y. BOUGROV** et **S. NIKOLSKI**

*Tome I*

Le tome I de l'ouvrage *Mathématiques supérieures* de Y. Bougrov, docteur ès sciences, et S. Nikolski de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S., est composé de deux parties.
La première, intitulée *Eléments d'algèbre linéaire et de géométrie analytique* traite de la théorie des déterminants et des matrices, des systèmes d'équations linéaires, des éléments d'algèbre vectorielle, des opérateurs linéaires et hermitiens, des formes quadratiques, de la droite et du plan, des coniques et des quadratiques.
La seconde, qui a pour titre *Calcul différentiel et intégral*, est consacrée aux limites d'une suite et d'une fonction, au calcul différentiel et intégral d'une fonction à une variable et d'une fonction à plusieurs variables, aux séries.
Est destiné à l'enseignement technique supérieur.

**MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES**

(en deux volumes)

par **Y. BOUGROV** et **S. NIKOLSKI**

*Tome II*

Le tome II de l'ouvrage *Mathématiques supérieures* de Y. Bougrov et S. Nikolski est la troisième partie de cette série. Ce livre, qui a pour titre *Equations différentielles. Intégrales multiples. Séries. Fonctions d'une variable complexe*, est consacré à la théorie des équations différentielles ordinaires, aux intégrales multiples, aux séries et à l'intégrale de Fourier, aux équations de physique mathématique, à la théorie des fonctions d'une variable complexe et au calcul opérationnel.

Est destiné à l'enseignement technique supérieur.


ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР